



ANALIZA SLIJEGANJA TEMELJNIH PLOČA METODOM KONAČNIH RAZLIKA

prof.dr.sc. **Maja Prskalo**, dipl.ing.gra .
mr.sc. **Anton Vrdoljak**
Građevinski fakultet
Sveučilište u Mostaru

Sažetak: Za kvalitetan proračun i pouzdano izvješće temelja objekta potrebno je, između ostalog, riješiti interakciju objekta, temelja i tla tijekom svih faza izgradnje. Mehaničke osobine tla su vrlo složene i rješavanje problema interakcije temeljnog tla sa elementima konstrukcije zahtjeva određena pojednostavljenja bez kojih bi problem bio nerješiv ili ekonomski neopravdan. Metoda konačnih razlika daje rezultate približne onima koji je proračun izvršen pomoću programskog koda danog u radu i pokazuju da slijeganja ploče manje ovise o promjeni modula reakcije tla, te su i maksimalne vrijednosti tih slijeganja manje od onih za temeljnu stopu. Navedene prednosti i redukcija diferencijalnih slijeganja su najvažniji i razlozi izbora temeljne ploče kao na temeljenja objekta.

Cljučne riječi: temeljna ploča, metoda konačnih razlika, slijeganje, Matlab program code.

ANALYSIS OF SETTLEMENT OF FOUNDATION PLATES BY FINITE DIFFERENCE METHOD

Abstract: This paper provides an analysis of settlement of foundation plates using finite difference method, and is designed in the aim to prove how this method, implemented in our Matlab program code, will give results similar to those obtained with the finite element method, and to show that plate settlements are less dependent on the change of modulus of soil reaction.

Key words: foundation plate; finite difference method; settlement; modulus of soil reaction; Matlab.



1. UVOD

Za kvalitetan proračun i pouzdano izvješće temelja objekta potrebno je, između ostalog, riješiti interakciju objekta, temelja i tla tijekom svih faza izgradnje. Ukoliko su temeljne stope preblizu, preklapaju se ili je potrebno reducirati diferencijalno slijeganje, usvajaju se temeljne ploče. Mehaničke osobine tla su vrlo složene i rješenje problema interakcije temeljnog tla sa elementima konstrukcije zahtjeva određena pojednostavljenja bez kojih bi problem bio nerješiv ili ekonomski neopravdan. Imaju li to u vidu, najveći broj rješenja razvijen je za tlo kao linearno elastičan, homogen i izotropan poluprostor. Ta pojednostavljenja i napredak računalne tehnologije omogućavaju korištenje numeričkih metoda u proračunu naprezanja i slijeganja temeljnih ploča. Premda već postoje mnogi radovi u kojima se ovakvi proračuni rješavaju različitim numeričkim metodama, u ovom radu dan je naglasak na metodu konačnih razlika. Metoda konačnih razlika predstavlja najstariju metodu za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

2. RANIJA ISTRAŽIVANJA

Razvijeni su različiti kako teorijski tako i numerički postupci za dobivanje približnih rješenja problema raspodjele realnog naprezanja u susedstvu građevinske konstrukcija - temeljno tlo. Praktično i razumno prihvatljiva aproksimacija stvarnog stanja se postiže razvojem numeričkih postupaka kao i temeljitijim istraživanjem deformacijskih svojstava temeljnog tla. (Veric, 2000).

Problem numeričkog rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, odnosno pronalaska i unapređivanja algoritama za njihovo rješavanje izdava se u numeričkoj analizi – grani numeričke matematike. Najpoznatija numerička metoda za rješavanje ovakvih problema je metoda konačnih razlika (ili *metoda mreže*) s idejom da se derivacije funkcija jedne ili više varijabli aproksimiraju podijeljenim razlikama. Druge važne metode za rješavanje ovakvih problema su: *metoda kolokacije*, *Galerkinova metoda*, *Ritzova metoda* i *metoda konačnih elemenata*. Metoda konačnih razlika zamjenjuje glavnu diferencijalnu jednadžbu sa sustavom algebarskih jednadžbi koje povezuju pomake promatranih točaka u odnosu na susedne točke. Ove točke su raspodijeljene u mreži na površini ploče. Metodu su prvi put formulirali Allen i Severn, i opisana je u različitoj literaturi.

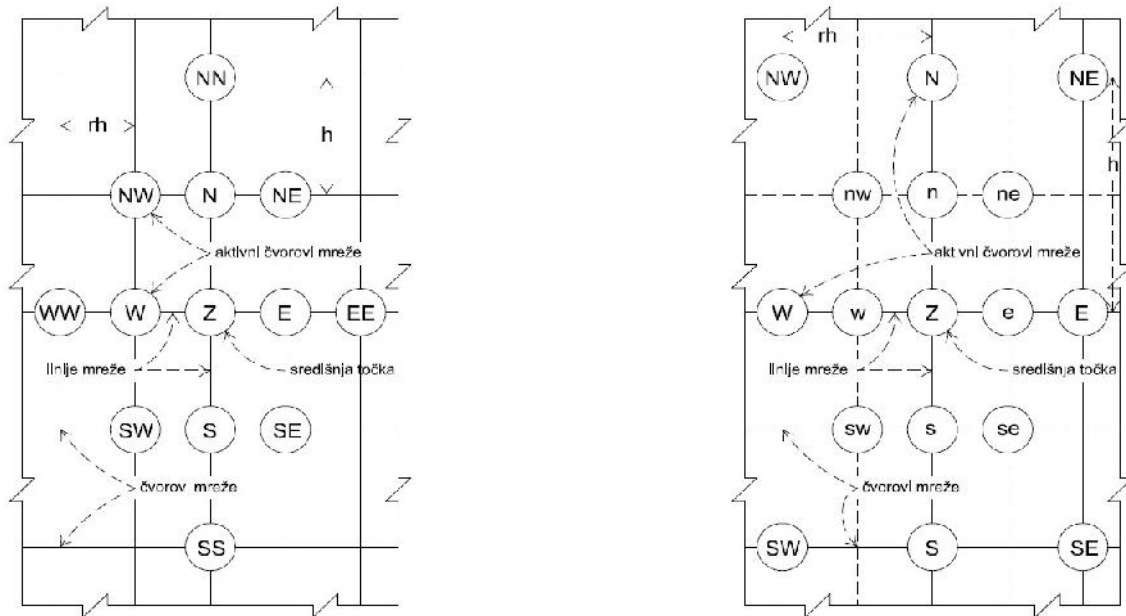
3. NUMERIČKA METODA MKR

Metoda konačnih razlika zamjenjuje glavnu diferencijalnu jednadžbu sa algebarskom jednadžbom koja povezuje pomak promatrane točke u odnosu na susedne točke. Ona se postavlja u svaku točku mreže na površini ploče i na taj način nastaje sustav algebarskih jednadžbi koji se zasniva na pravokutnom koordinatnom sustavu, opterećenju te fizičkim i elastičnim konstantama opterećenja ploče. Ova opterećenje-deformacija jednadžba uspostavlja linearnu vezu između opterećenja u žarišnoj točki i nepoznatoj veličini deformacije ploče u toj točki i ostalim aktivnim točkama, te se rješavanjem ove jednadžbe dobivaju aproksimativne vrijednosti deformacije ploče u aktivnim točkama mreže. Progušavanjem mreže povećava se red matrice sustava, odnosno raste složenost algoritma i ne bi rješavanje bilo gotovo nemoguće bez upotrebe računala.

Na slici (1) prikazana je podjela površine ploče u linijama mreže na pravokutne elemente mreže. U smjeru y razmak između linija je h , i rh u smjeru x . Mjesta presijecanja linija nazivaju se točkama mreže. Neke od njih su označene slovima i nazivaju se aktivnim točkama, a središnja točka aktivne grupe točka naziva se žarišna točka.



Da bi se pojednostavilo pisanje jednačbi, oznake aktivnih točaka mreže koriste se i kao veličine slijeganja w , srednje ravni plohe u toj točki.



Slika 1. Sustav označavanja točaka mreže (Izvor: W. T. Moody, Moments and reactions for rectangular plates, 1978.)

Pomoću u standardnih postupaka metode konačnih razlika, uvrštavanje vrijednosti progiba plohe u obliku oznaka aktivnih točaka i srednjim, Lagrangeovu diferencijalnu jednačbu prevodimo u sljedeću jednačbu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} (WW - 4W + 6Z - 4E + EE) \\ & + \frac{2}{r^2} (NW - 2N + NE - 2W + 4Z - 2E + SW - 2S + SE) \\ & + (NN - 4N + 6Z - 4S + SS) = \frac{P_z h^2}{rD} \end{aligned} \quad (1)$$

Ova jednačba predstavlja osnovnu opterećenje-deformacija relaciju za bilo koju unutarnju aktivnu točku. Ovaj oblik jednačbi koristi se za posebne slučajeve koji uključuju i granične slučajeve, i za sve relacije koje povezuju deformaciju plohe sa opterećenjem, momentima, reakcijama i posmikom. Ova opterećenje-deformacija jednačba uspostavlja linearnu vezu između opterećenja u žarišnoj točki i nepoznate veličine deformacije plohe u toj točki i ostalim aktivnim točkama, te se rješavanjem ove jednačbe dobivaju aproksimativne vrijednosti deformacije plohe u aktivnim točkama mreže.

4. ODREĐIVANJE MODULA REAKCIJE PODLOGE

Temelj objekta definira se kao sastavni dio građevinskog objekta koji je u direktnom kontaktu sa tlom, odnosno stijenskim masivom i koji prima i prenosi opterećenje sa objekta na tlo, odnosno stijenski masiv. Tlo se uslijed opterećenja objekta deformira i tako deformirano vraća na konstrukciju objekta reaktivno opterećenje. Tlo i konstrukcija objekta deformiraju se zajedno, radi čega je potrebno projektiranje temelja razmatrati skupa sa



konstrukcijom objekta i obratno. Uzajamno njihovo razmatranje i projektiranje dovodi do povoljnijih tehničkih i ekonomskih rješenja cjelokupnog objekta. [2]

Pri proraunu temeljnih ploča, tlo možemo promatrati na dva načina:

- kao grupa opruga, prema Winklerovoj teoriji;
- kao kontinuum, koji se najčešće promatra kao elastični poluprostor.

Modul reakcije podloge može se odrediti na sljedeće načine: a) pomoću kružne ploče, b) pomoću tablice karakterističnih vrijednosti i korelacija; c) proraunom slijeganja tla. Uobičajeni način dobivanja modula reakcije tla je nanošenjem opterećenja na tlo preko kružne ploče promjera 30 cm. Nedostatak ove metode je u tome što se opterećenje samo sloj manje debljine, u odnosu na sloj koji opterećenje temeljnom pločom. Modul reakcije podloge može također biti procijenjen na osnovu predviđenog slijeganja stvarnog temelja. U ovom slučaju može se pretpostaviti da je temelj krut i izložen pritisku koji odgovara ukupnom opterećenju na temelj. Slijeganje se predviđa standardnim metodama mehanike tla. U tom slučaju modul reakcije podloge se računa na sljedeći način:

$$k = \frac{\bar{q}}{\bar{w}} \quad (2)$$

gdje je \bar{q} prosječni tlak a \bar{w} slijeganje krutog temelja.

Ovaj postupak omogućava uzimanje u obzir različitih slojeva izloženih različitim razinama naprezanja, što u prethodnim metodama nije bilo moguće. Osim toga, kratkoročnim i dugoročnim predviđanjem slijeganja dobivamo module za kratkoročnu i dugoročnu analizu ponašanja temelja, uzimajući u obzir i konsolidaciju i puzanje tla. Teško je uspostaviti relaciju između k i Youngovog modula za elastični poluprostor zbog toga što odgovor ovisi o krutosti samog temelja. Jedna takva relacija se dobije izjednačavanjem slijeganja krute ploče na homogenom elastičnom poluprostoru, koje je dano jednadžbom (3), sa slijeganjem iste ploče na Winklerovim oprugama, koje je dano jednadžbom (4). Iz toga slijedi:

$$k = \frac{1}{B \cdot I_B} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) \quad (3)$$

Modul reakcije tla nije konstantna veličina, već ovisi o veličini opterećenja (p), te o obliku i veličini opterećenje ispitne plohe. U tablici (1) date su vrijednosti za modul reakcije tla (k_1) prema Terzaghiju (1955), za ispitnu površinu 30 cm x 30 cm i za različite vrste tla i njegovu zbijenost. Za slučajve ih ispitnih površina Terzaghi predlaže korekcije u obliku (Nonveiller, 1981): [2]

za nekoherentno tlo:

$$k = k_1 \left(\frac{B' + 1}{2B'} \right)^2 \quad (4)$$

za koherentno tlo:

$$k = \frac{k_1}{B'} \quad (5)$$

gdje je $B' = \frac{B}{30,3}$;

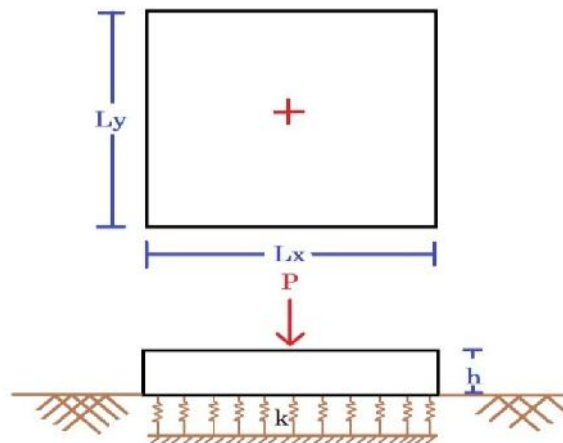
B – širina temelja (cm).



Pijesak		Rahli	Srednje zbijen	Jako zbijen
1.	Suh ili vlažan	0,6 - 1,9	1,9 - 9,6	9,6 - 32
2.	Djelomično potopljeno	1,3	4,2	16
3.	Potopljeno	0,8	2,6	9,6
Glina		Konzistencija		
		Kruta	Vrlo kruta	vrsta
1.	q_u (kN/m ²)	100 - 200	200 - 400	> 400
2.	Granične vrijednosti	1,6 - 3,2	3,2 - 6,4	6,4
3.	Djelomično potopljeno	2,4	4,8	9,6

Tablica 1. Odabrani moduli reakcije tla za primjere proračuna

U sljedećim primjerima dani su proračuni za temeljnu stopu i temeljnu ploču na različitim vrstama tla, čime su dobivena njihova maksimalna slijeganja. U tim proračunima korišten je modificirani kod programa kojeg je u Matlab-u početno izradio *Salar Delavar Ghashghaei* [10].

Slika 3. Temeljna stopa na Winklerovim oprugama krutosti k

Dani su primjer temeljne stope sljedećih karakteristika:

$$L_x = 120 \text{ cm}$$

$$L_y = 120 \text{ cm}$$

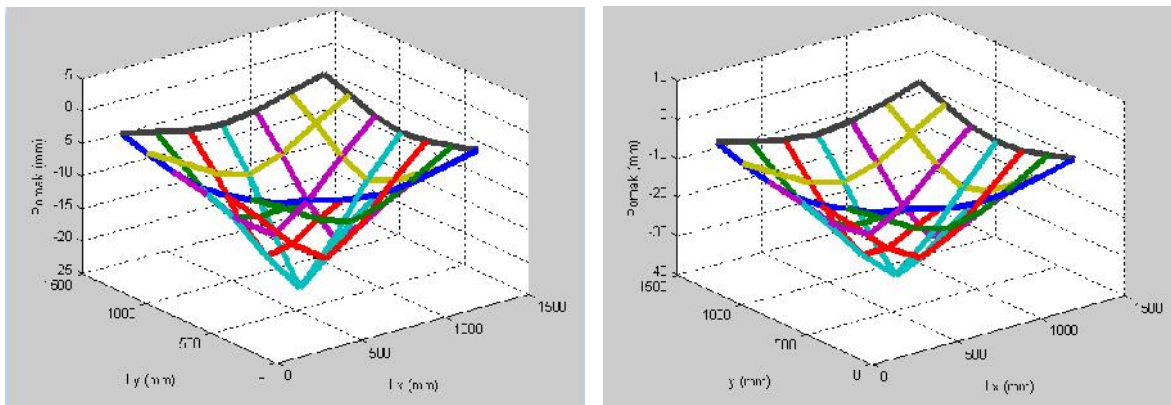
$$h = 100 \text{ cm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0,20$$



Vrsta tla:	k_1 (10^4 kN/m ³)	k (10^4 kN/m ³)	δ_{max} (cm)
Rahli pijesak (suh ili vlažan)	1,9	0,47975	-3,353
Jako zbijen pijesak (suh ili vlažan)	32	8,08	-2,321
Glina krute konzistencije	2,4	0,606	-3,326
Glina vrste konzistencije	9,6	2,424	-2,986



Slika 4. Dijagrami progiba temeljne stope na elastičnoj podlozi, dobivenih metodom konačnih razlika

Kod temeljne ploče, dimenzija **500x500 cm** i visine **$h = 100$ cm**, ukupna sila raspoređena je simetrično u četiri krajnje unutarnje točke mreže.

Iz tablice $\rightarrow k_1 = 1,9 \cdot 10^4$ kN/m³

$$k = \frac{k_1}{B'} = \frac{19000}{\frac{500}{30,3}} = 1279,3 \text{ kN/m}^3$$

Maksimalni progib temeljne ploče (slijeganje na sredini temeljne stope):

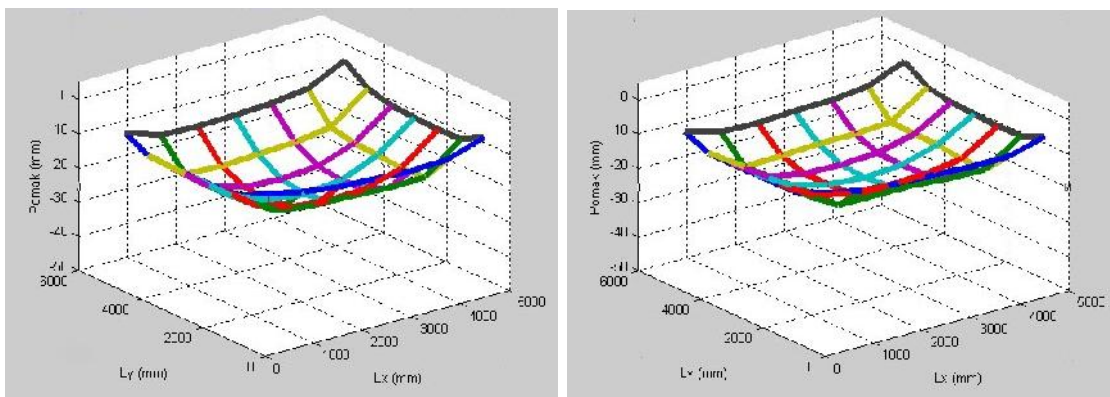
$$\delta_{max} = -2,06 \text{ cm}$$

Maksimalna slijeganja temeljne ploče na ostale tri vrste tla dobivena su na isti način kao i za temeljnu stopu.



Vrsta tla:	k_1 (10^4 kN/m ³)	k (kN/m ³)	δ_{max} (cm)
Rahli pijesak (suh ili vlažan)	1,9	1279,3	-2,06
Jako zbijen pijesak (suh ili vlažan)	32	19392	-1,55
Glina krute konzistencije	2,4	14544	-2,05
Glina vrste konzistencije	9,6	5817,6	-1,9

Tablica 2. Prikaz rezultata proračuna slijeganja za temeljnu ploču



Slika 5. Dijagrami progiba temeljne ploče na elastičnoj podlozi, dobivenih metodom konačnih razlika

6. ZAKLJUČAK

Primjeri proračuna temeljnih ploča iz prakse pokazuju razlike u preciznosti i pojedinih numeričkih metoda kod analize naprezanja i deformacija. Pri proračunu se stišljivo tlo zamjenjuje sustavom elastičnih opruga, koje se deformiraju samo ispod opterećenog dijela ploče. Ovaj model ne zadovoljava u potpunosti zbog toga što se deformacije kod realnog tla šire i izvan opterećenog dijela, ali se ipak često koristi jer su analitička rješenja diferencijalnih jednadžbi relativno jednostavna, a dobiveni rezultati realniji od onih dobivenih uz pretpostavku linearne raspodjele reakcije tla. Nadalje, u ovom modelu nisu razmatrana ni istezanja (naprezanja) zbog temperature. Sumiranjem naših rezultata dolazimo do podatka kako metoda konačnih razlika daje rezultate približne onima kod metode konačnih elemenata, s tim da su konture momenata savijanja kod metode konačnih razlika zagađenije od onih kod metode konačnih elemenata. Na rezultate svake od numeričkih metoda utjecaj ima gustoća mreže. Veća gustoća daje zagađenije dijagrame momenata savijanja i deformacija temeljne ploče. Primjeri koji su proračun izvršeni pomoću programskog koda ---- pokazuju da slijeganje ploče manje ovisi o promjeni modula reakcije tla, te su i maksimalne vrijednosti tih slijeganja manje od onih za temeljnu stopu. Navedene prednosti i redukcija diferencijalnih slijeganja su najčešći razlozi izbora temeljne ploče kao na ina temeljenja objekta. Fokus u daljnjim istraživanjima treba biti postavljen kako na uključivanje toplinskih naprezanja tako i na uključivanje dinamičkog opterećenja u proračunima.



LITERATURA

1. <http://www.mathworks.com/examples/matlab/>
2. J. A. Hemsley, Design applications of raft foundations, London, 2000.
3. W. T. Moody, Moments and reactions for rectangular plates, 1978.
4. R. Scitovski, Numerička matematika, Osijek, 2004.
5. J. E. Bowles, Analytical and computer methods in foundation engineering, 1974.
6. C. Aron, E. Jonas, Structural element approaches for soil-structure interaction, Goteborg, 2012.
7. E. Nonveiller, Mehanika tla i temeljenje građevina, Zagreb, 1979.
8. Veri, F. (2000). *Savitljive temeljne konstrukcije (Flexible foundation structures)*, Authorized lectures, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Institute for Geotechnics
9. *** GEO 5 (2010) FEM, SHEETING CHECK, Software, version 5.10.32.0,