RJEŠAVANJE PROBLEMA SVOJSTVENE ZADAĆE KOD VEZANIH POLJA

Ante Džolan, mag.građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru

Sažetak:
U radu je ukratko opisan model za simulaciju vezanog problema međudjelovanja fluid – konstrukcija. Za rješavanje problema svojstvenih zadaća koristi se WYD metoda. Razvijeni model daje mogućnost proračuna međudjelovanja fluid – konstrukcija za 2D problem. Mogućnosti modela prikazane su na numeričkom primjeru.

Ključne riječi: vezani problem, numerički model, WYD metoda, međudjelovanje fluid - konstrukcija

SOLVING THE EIGENVALUE PROBLEM IN COUPLED FIELDS

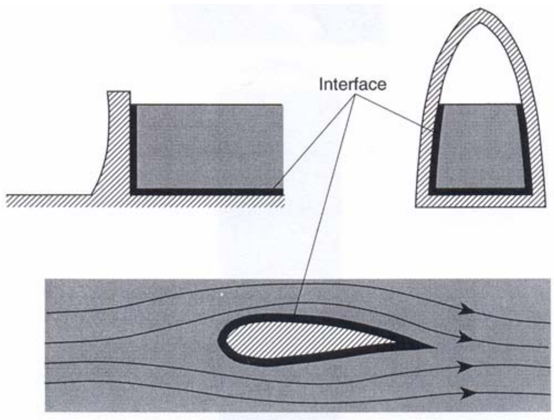
Abstract:
This paper briefly describes a model for simulation of the coupled fluid-structure interaction problem. WYD method is used to solve eigenvalue problems. The developed model make it possible to calculate the fluid-structure interaction for a 2D problem. Possibilities of the model are shown in a numerical example.

Key words: coupled problem, numerical model, WYD method, fluid-structure interaction

1. UVOD

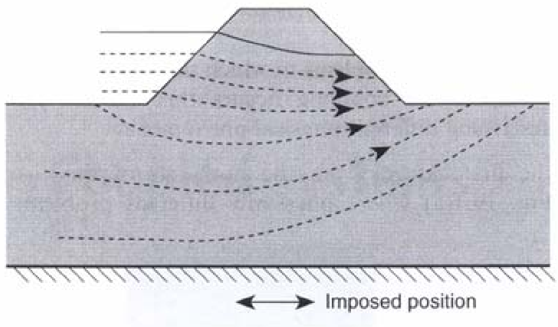
U radu se opisuje problem rješavanja svojstvenih vrijednosti vezanih zadaća. Problem vezanih zadaća možemo podijeliti u dvije klase:

- ***Klasa I*** (slika 1) – međudjelovanje postoji na kontaktnoj plohi između dvaju medija, pri tome se svaki od medija promatra kao zasebna cjelina te se opisuje i modelira odgovarajućim fizikalnim jednadžbama. Potom se vrši opis i modeliranje njihovog međudjelovanja. Kada imamo model svakog medija i njihovog međudjelovanja pristupa se formiranju jedinstvenoga modela koji obuhvaća ponašanje svakog medija i njihova međudjelovanja.



Slika 1. Problem klase I, međudjelovanje na kontaktnoj plohi

- ***Klasa II*** (slika 2) – utjecaj međudjelovanja uključen je u diferencijalnu jednadžbu koja opisuje promatranu fizikalnu pojavu.



Slika 2. Problem klase II

U ovom radu se obrađuje problem proračuna svojstvenih vrijednosti/vektora vezane zadaće fluid – konstrukcija iz klase I – međudjelovanje na kontaktnu plohu.

2. NUMERIČKI MODEL TEKUĆINE

2.1. Model tekućine

Tekućina (fluid) je tvar (kapljevina ili plin) koja se neprestano deformira usljed vanjskog djelovanja. Može biti idealna (tečenje bez trenja - tzv. Newton-ova tekućina) ili viskozna (postoji trenje među molekulama tekućine u gibanju). Sve realne tekućine su viskozne, no u

mnoštvu slučajeva utjecaj viskoznosti je mali i može se zanemariti. Vrlo često su efekti viskoznosti ograničeni na uska područja ili rubne pojaseve blizu granica tečenja, a ostatak toka se može promatrati bez utjecaja viskoznosti.
Tekućine se dalje mogu podijeliti na stlačive i nestlačive, zavisno o tome da li je promjena gustoće značajna ili ne.
Problemi mehanike tekućine (fluida) se mogu grupirati u dvije glavne kategorije:

- problemi s tečenjem (površinski tokovi i sl.) i
- problemi bez tečenja izloženi dinamičkoj pobudi (rezervoari, akumulacije i sl.).

U ovom su radu razmatrani problemi mirne stlačive tekućine izložene dinamičkoj pobudi.

1.1.1. Formulacija tekućine

Gibanje tekućine opisano je u Euler-ovom koordinatnom sustavu, pretpostavljajući probleme s malim pomacima. Za analizu tekućine općenito se koriste formulacije:

- pomaka,
- tlakova,
- potencijala pomaka i
- brzinskog potencijala.

Kod formulacije pomaka su tri nepoznanice, dok su u ostalim formulacijama po jedna nepoznanica. U ovom je radu korištena formulacija tlakova i formulacija potencijala pomaka.
Tekućina se smatra stlačivom i bez viskoznosti. Diskretizacija polja tekućine izvršena je metodom konačnih elemenata (MKE), dok je vremenska diskretizacija izvršena metodom konačnih diferencija (MKD). Problem rubnih uvjeta riješen je metodom kraćenja ruba (eng.“truncation”), tj. beskonačno pružanje stvarne sredine modelirano je konačnim modelom. Ovaj model je u velikom broju slučajeva prihvatljiv kod statičkih analiza, dok kod dinamičkih analiza takvo modeliranje granica zahtjeva poseban tretman u cilju eliminiranja refleksije valova na umjetno formiranim granicama.
Iako je u ovom poglavlju naglasak dan na simulaciju ponašanja polja tekućine, ujedno je opisan i model ponašanje tekućine u dodiru s deformabilnom konstrukcijom, koji se dalje koristi u simulaciji međudjelovanja tekućine i konstrukcije.

1.1.2. Linearni model tekućine

Linearni model tekućine može se opisati izrazom:

$$p = -E\,\varepsilon_v \qquad (2.1)$$

U gornjem izrazu p označava hidrodinamički tlak (bez hidrostatičkog), E je zapreminski modul elastičnosti , a ε_v je volumenska deformacija tekućine. Ovim modelom se pretpostavlja da se u tekućini mogu pojaviti neograničeni negativni tlakovi (“vlačno” naprezanje), što u pojedinim slučajevima može dati pogrešne rezultate. Međutim, u svim slučajevima kad je ukupni rezultantni tlak u tekućini (atmosferski + hidrostatički + hidrodinamički) veći od nule, odnosno veći od tlaka para tekućine, ovakav model tekućine zadovoljava.
Na osnovu izraza (2.1) dalje možemo pisati:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla u = -\frac{p}{E} \quad ; \quad c^2 = E/\rho \qquad (2.2)$$

pa slijedi:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla u = -\frac{p}{\rho\, c^2} \qquad (2.3)$$

1.1.2.1. Formulacija tlakova

Osnovne jednadžbe

Deriviranjem izraza (2.3) po vremenu, dobiva se:

$$\dot{\varepsilon}_v = \nabla\dot{u} = -\frac{\dot{p}}{\rho\ c^2} \tag{2.4}$$

$$\ddot{\varepsilon}_v = \nabla\ddot{u} = -\frac{\ddot{p}}{\rho\ c^2} \tag{2.5}$$

Ako se primijeni Laplace-ov operator (∇) na jednadžbu $\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho R_i - \nabla p + \mu\nabla^2 v_i$ (Navier – Stokesove jednadžbe) i zanemari sila gravitacije ($R_i = 0$), koja uzrokuje samo hidrostatički tlak, slijedi:

$$\rho\nabla\ddot{u}_i = \nabla^2 p + \mu\nabla^2(\nabla\dot{u}_i) \tag{2.6}$$

te ako se uvrste izrazi (2.3), (2.4) i (2.5) u (2.6), dobiva se jednadžba ponašanja viskozne tekućine, koja predstavlja poznatu valnu jednadžbu:

$$\nabla^2 p + \xi\nabla^2\dot{p} = \ddot{p}/c^2 \tag{2.7}$$

gdje je:

$$\xi = \mu/\rho\ c^2 \tag{2.8}$$

U gornjim izrazima p je hidrodinamički tlak (bez hidrostatskog), c je brzina zvuka u tekućini, ρ je gustoća tekućine i μ dinamička viskoznost tekućine.

Ako se zanemari utjecaj viskoznosti, tj. ako se pretpostavi Newton-ovo tečenje, izraz (2.6) se svodi na Helmoholz-ovu jednadžbu:

$$\nabla^2 p = \ddot{p}/c^2 \tag{2.9}$$

Izraz (2.9) se može napisati, prema (2.3), i u slijedećem obliku:

$$\nabla^2 p = \ddot{p}/(E/\rho) \tag{2.10}$$

Rubni uvjeti

Za tekućinu trebaju sljedeći rubni uvjeti biti zadovoljeni:

(i) Na slobodnom licu s površinskim valovima (ako se uzme u obzir samo utjecaj primarnih valova):

$$p = \rho\ g u_y \tag{2.11}$$

gdje u_y označava visinu vala, a g gravitacijsku konstantu.
Na slobodnom licu bez površinskih valova:

$$p = 0 \tag{2.12}$$

(ii) Na pokretnim granicama, gdje tekućina ima ubrzanje $\ddot{u}_n$ okomito na granicu, gradijent tlaka se može izraziti kao:

$$\partial p/\partial n = -\rho\ \ddot{u}_n \tag{2.13}$$

Na nepomičnim granicama je:

$$\partial p/\partial n = 0 \tag{2.14}$$

(iii) Uvjet sprječavanja refleksije valova na granici radijacije može se izraziti (Sommerfeld-ov uvjet):

$$\dot{p} = -\frac{1}{c}\left(\partial p/\partial n\right) \tag{2.15}$$

gdje "n" predstavlja smjer jedinične vanjske normale na granici radijacije.

Formulacija metodom konačnih elemenata

Diskretizacija sustava je izvršena metodom konačnih elemenata. Ako se područje tekućine i područje konstrukcije u dodiru s tekućinom diskretizira mrežom konačnih elemenata, koristeći standardnu Galjerkin-ovu metodu, nepoznati tlakovi tekućine mogu se izraziti s:

$$\mathbf{p} = \mathbf{N}_p \overline{\mathbf{p}} \tag{2.16}$$

gdje je $\mathbf{N}_p$ bazna funkcije za tlakove na granici međudjelovanja.

Diferencijalna jednadžba dinamičke ravnoteže sustava u matričnoj formulaciji može se izraziti:

$$\mathbf{M}_f\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f\mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho\ \mathbf{Q}_t\left(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}\right) \tag{2.17}$$

U prethodnoj jednadžbi, $\mathbf{M}_f$ predstavlja matricu masa tekućine, $\mathbf{C}_f$ matricu radijacijskog prigušenja tekućine i $\mathbf{K}_f$ 'matricu krutosti' tekućine; **p** vektor nepoznatih čvornih tlakova, $\mathbf{f}_f$ vektor čvornih sila, $\mathbf{Q}_t$ matricu međudjelovanja tekućina-konstrukcija, $\ddot{\mathbf{u}}$ matricu ubrzanja čvorova konstrukcije u odnosu na bazu i $\ddot{\mathbf{d}}$ vektor ubrzanja podloge. U slučaju krute (nedeformabilne) podloge, izraz (2.17) se reducira na:

$$\mathbf{M}_f\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_f\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f\mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho\ \mathbf{Q}_t\ddot{\mathbf{d}} \tag{2.18}$$

Formiranje matrica i vektora u izrazima (2.17) i (2.18), prema metodi konačnih elemenata, definirano je sljedećim izrazima:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{K}_f)_{ij} &= \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{pi}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{pj}}{\partial z} \right) \right] dV \\
(\mathbf{C}_f)_{ij} &= (1/c) \int_{\Omega_r} \mathbf{N}_{pi}^T \, \mathbf{N}_{pj} \, d\Omega \\
(\mathbf{M}_f)_{ij} &= (1/g) \int_{\Omega_{sl}} \mathbf{N}_{pi}^T \, \mathbf{N}_{pj} \, d\Omega + (1/c^2) \int_V \mathbf{N}_{pi}^T \, \mathbf{N}_{pj} \, dV \\
(\mathbf{Q}_t)_{ij} &= \int_{\Omega_i} \mathbf{N}_{ui}^T \, \vec{\mathbf{n}} \, \mathbf{N}_{pj} \, d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

U gornjim izrazima $\mathbf{N}_p$ su bazne funkcije za tlakove tekućine, a $\mathbf{N}_u$ bazne funkcije za pomake konstrukcije; V je volumen tekućine, Ω_{sl} je granica tekućine sa slobodnim licem, Ω_r je granica radijacije, Ω_i je granica tekućine na spoju s konstrukcijom (granica međudjelovanja) i $\vec{\mathbf{n}}$ je vektor jedinične vanjske normale na granici međudjelovanja. Sve matrice u jednadžbama (2.17) i (2.18), osim matrice $\mathbf{Q}_t$, su simetrične i pojasne. Broj članova različitih od nule u $\mathbf{Q}_t$ ovisi o broju čvorova tekućine na spoju s konstrukcijom.

Za nestlačive tekućine, brzina širenja valova u tekućini iznosi $c = \infty$, pa se (2.17) svodi na:

$$
\mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \, \mathbf{Q}_t (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}) \tag{2.20}
$$

iz čega je vidljivo da se rješenje (2.20) svodi na statičko rješenje u svakom vremenskom koraku. Kod toga je hidrodinamički tlak proporcionalan ubrzanju podloge.

Ako se promatra samo polje tekućine, tj. kad je $\ddot{\mathbf{u}}$=0, jednadžba (2.20) se svodi na:

$$
\mathbf{K}_f \mathbf{p} = \mathbf{f}_f - \rho \, \mathbf{Q}_t \, \ddot{\mathbf{d}} \tag{2.21}
$$

1.1.2.2. Formulacija potencijala pomaka

Osnovne jednadžbe

Vrlo čest pristup pri opisu polja tekućine je da se polje pomaka zamijeni poljem potencijala pomaka, koje je skalarna a ne vektorska veličina. Time se značajno smanjuje broj nepoznanica u čvoru.

Potencijal pomaka se definira kao:

$$
\nabla \psi = -\rho \, u \tag{2.22}
$$

Ako promjena gustoće tekućine (ρ) nije značajna, tada se koristeći (2.22) mogu reducirati Navier-Stokes-ove jednadžbe ($\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho R_i - \nabla p + \mu \nabla^2 v_i$). Uz uvjet da se zanemare viskoznost i gravitacijske sile, dobiva se:

$$\nabla\ddot{\psi} = \nabla p \tag{2.23}$$

Integracijom jednadžbe (2.23) po prostoru, dobiva se:

$$\ddot{\psi} = p \tag{2.24}$$

Ako se primijeni Laplace-ov (∇) operator na jednadžbu (2.22), te u tako dobivenu jednadžbu uvrsti (2.3) i (2.24), dobiva se:

$$\nabla^2\psi = \ddot{\psi}/c^2 \tag{2.25}$$

Rubni uvjeti

(i) Na slobodnom licu s površinskim valovima (ako u obzir uzimamo samo utjecaj primarnih valova):

$$p = \rho\ gu_y = \ddot{\psi} = g\frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{2.26}$$

Na slobodnom licu bez površinskih valova:

$$p = \ddot{\psi} = 0 \tag{2.27}$$

(ii) Na pokretnim granicama, gdje tekućina ima ubrzanje $\ddot{u}_n$ okomito na granicu:

$$\partial\psi/\partial n = -\rho\ u_n \tag{2.28}$$

Na nepomičnim granicama:

$$\partial\psi/\partial n = 0 \tag{2.29}$$

(iii) Uvjet sprječavanja refleksije valova na granici radijacije može se izraziti kao (Sommerfeld-ov uvjet):

$$\partial\psi/\partial n = -\dot{\psi}/c \tag{2.30}$$

U gornjim izrazima “n” predstavlja smjer jedinične vanjske normale na granici radijacije.

Formulacija metodom konačnih elemenata

Na analogan način kao kod formulacije tlakova, koristeći standardnu Galjerkin-ovu metodu, nepoznate potencijale pomaka tekućine može se iskazati (matrična formulacija) kao:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{N}_{\psi}\mathbf{\Psi} \tag{2.31}$$

gdje je $\mathbf{N}_{\psi}$ bazna funkcije za potencijal pomaka na granici međudjelovanja.

Diferencijalna jednadžba dinamičke ravnoteže sustava u matričnoj formulaciji može se analogno jednadžbi (2.17) izraziti:

$$\mathbf{M}_f\ddot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{C}_f\dot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{K}_f\mathbf{\Psi} = \mathbf{f}_f - \rho\ \mathbf{Q}_t(\mathbf{u}+\mathbf{d}) \qquad (2.32)$$

U prethodnoj jednadžbi, $\mathbf{M}_f$ predstavlja matricu masa tekućine, $\mathbf{C}_f$ matricu radijacijskog prigušenja tekućine i $\mathbf{K}_f$ 'matricu krutosti' tekućine; $\mathbf{\Psi}$ vektor nepoznatih čvornih potencijala pomaka, $\mathbf{f}_f$ vektor čvornih sila, $\mathbf{Q}_t$ matricu međudjelovanja tekućina-konstrukcija, $\mathbf{u}$ matricu pomaka čvorova konstrukcije u odnosu na bazu i $\mathbf{d}$ vektor pomaka podloge. U slučaju krute (nedeformabilne) podloge, (2.32) se reducira na:

$$\mathbf{M}_f\ddot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{C}_f\dot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{K}_f\mathbf{\Psi} = \mathbf{f}_f - \rho\ \mathbf{Q}_t\mathbf{d} \qquad (2.33)$$

Na osnovu formulacije potencijala pomaka, pokazat će se izvod matrica za primjenu metode konačnih elemenata. Polazište je osnovna jednadžba (2.25), te jednadžbe rubnih uvjeta (2.26), (2.28) i (2.30). Bazne funkcije su dane u poglavlju 3.

Kako približno rješenje (2.31) treba zadovoljiti osnovnu jednadžbu i rubne uvjete, može se napisati:

$$\int_V \left(\nabla^2\Psi - \ddot{\Psi}/c^2\right)dV = -\int_{\Omega_{sl}} \left(\ddot{\Psi}/g\right)d\Omega_{sl} + \int_{\Omega_r}\left(\dot{\Psi}/c\right)d\Omega_r + \int_{\Omega_i}\left(\rho u_n\right)d\Omega_i \qquad (2.34)$$

Ako se sortiraju istovjetni članovi, tada slijedi:

$$-\frac{1}{c^2}\int_V \ddot{\Psi}dV + \frac{1}{g}\int_{\Omega_{sl}}\ddot{\Psi}d\Omega_{sl} - \frac{1}{c}\int_{\Omega_r}\dot{\Psi}d\Omega_r + \int_V \nabla^2\Psi dV + \int_{\Omega_i}\left(\rho u_n\right)d\Omega_i = 0 \qquad (2.35)$$

Promatrajući jednadžbu (2.35) u svjetlu metode konačnih elemenata, uočljivo je da je ona istovjetna jednadžbi (2.32) ako se uvede:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K}_f)_{ij} &= \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi i}}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{N}_{\psi j}}{\partial z}\right)\right]dV \\
(\mathbf{C}_f)_{ij} &= (1/c)\int_{\Omega_r} \mathbf{N}_{\psi i}^T\ \mathbf{N}_{\psi j}\ d\Omega \\
(\mathbf{M}_f)_{ij} &= (1/g)\int_{\Omega_{sl}} \mathbf{N}_{\psi i}^T\ \mathbf{N}_{\psi j}\ d\Omega + \left(1/c^2\right)\int_V \mathbf{N}_{\psi i}^T\ \mathbf{N}_{\psi j}\ dV \\
(\mathbf{Q}_t)_{ij} &= \int_{\Omega_i} \mathbf{N}_{ui}^T\ \vec{\mathbf{n}}\ \mathbf{N}_{\psi j}\ d\Omega
\end{aligned} \qquad (2.36)$$

U gornjim izrazima $\mathbf{N}_\psi$ su bazne funkcije za potencijal pomaka tekućine, a $\mathbf{N}_u$ bazne funkcije za pomake konstrukcije; V je volumen tekućine, Ω_{sl} je granica tekućine sa slobodnim licem, Ω_r je granica radijacije, Ω_i je granica tekućine na spoju s konstrukcijom (granica međudjelovanja) i $\vec{\mathbf{n}}$ je vektor jedinične vanjske normale na granici međudjelovanja. Sve matrice u (2.33) i (2.34) kao i u (2.17) i (2.18), osim matrice $\mathbf{Q}_t$, su simetrične i pojasne. Broj članova različitih od nule u $\mathbf{Q}_t$ ovisi o broju čvorova tekućine na spoju s konstrukcijom.

3. NUMERIČKI MODEL KONSTRUKCIJE

3.1. Jednadžba dinamičke ravnoteže

Na vrlo sličan način kao kod tekućine izvodi se numerički model za konstrukciju. Ovaj model je vrlo dobro opisan u literaturi $[4-6]$, pa će se ovdje samo ukratko opisati.

Jednadžba dinamičke ravnoteže konstrukcije, koristeći se načelom virtualnog rada, može se zapisati u obliku:

$$\int_{\Omega}(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}(\delta\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}-\rho_{\mathrm{S}}\ddot{\mathbf{u}}-\mu'\dot{\mathbf{u}})\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{\mathrm{t}}}(\delta\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{3.1}$$

U gornjem izrazu $\delta\mathrm{u}$ je vektor virtualnih pomaka, $\dot{\mathrm{u}}$ - vektor brzina, $\ddot{\mathrm{u}}$ - vektor ubrzanja, $\delta\varepsilon$ - vektor pridruženih virtualnih deformacija, b je vektor volumnih a t vektor površinskih sila, σ - vektor naprezanja, ρ_s - gustoća, μ' - parametar prigušenja, Ω - područje konstrukcije i Γ - područje konstrukcije izloženo djelovanju površinskih sila.

Izraz (3.1) vrijedi u slučaju geometrijske i materijalne nelinearnosti. Kada se zanemare vremenski utjecaji izraz (3.1) se svodi na:

$$\int_{\Omega}(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{\mathrm{t}}}(\delta\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{3.2}$$

Prostornom diskretizacijom konstrukcije te primjenom metode konačnih elemenata (MKE), jednadžba dinamičke ravnoteže (3.1) s nepoznatim čvornim pomacima **u**, može se napisati u poznatom obliku, koji predstavlja linearnu diferencijalnu jednadžbu dinamičke ravnoteže sustava:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{s}}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}_{\mathrm{s}}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{R}(\mathbf{u})=\mathbf{f}_{\mathrm{s}} \tag{3.3}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_{\mathrm{s}})_{\mathrm{ij}} &= \int_{\Omega_{\mathrm{s}}}\mathbf{N}_{\mathrm{si}}^{\mathrm{T}}\,\rho_{\mathrm{s}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{sj}}\,\mathrm{d}\Omega\\
(\mathbf{C}_{\mathrm{s}})_{\mathrm{ij}} &= \int_{\Omega_{\mathrm{s}}}\mathbf{N}_{\mathrm{si}}^{\mathrm{T}}\,\mu'\,\mathbf{N}_{\mathrm{sj}}\,\mathrm{d}\Omega\\
\mathbf{R}_{\mathrm{i}}(\mathrm{u}) &= \int_{\Omega_{\mathrm{s}}}\mathbf{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\Omega\\
(\mathbf{f}_{\mathrm{s}})_{\mathrm{i}} &= \int_{\Omega_{\mathrm{s}}}\mathbf{N}_{\mathrm{si}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{t}}}\mathbf{N}_{\mathrm{si}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{t}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\Gamma
\end{aligned} \tag{3.4}$$

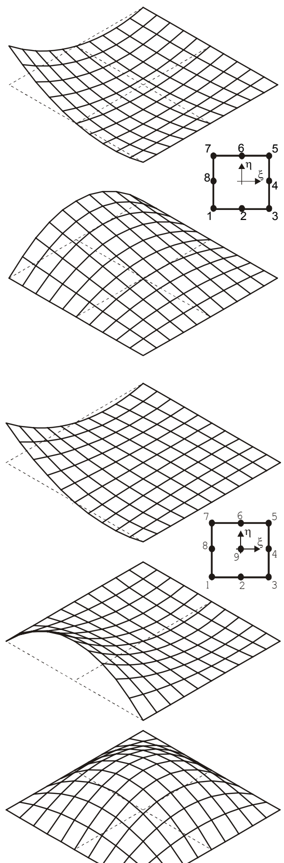
U prethodnoj jednadžbi, $\mathbf{M}_s$ predstavlja matricu masa konstrukcije, $\mathbf{C}_s$ matricu prigušenja konstrukcije, **R**(**u**) vektor unutarnjih potpornih sila, a $\mathbf{f}_s$ vektor vanjskih čvornih sila. $\mathbf{N}_i$ su bazne funkcije pomaka, a **B** matrica veze naprezanja i deformacija.
Vektor unutrašnjih sila **R**(**u**) može se napisati i u obliku:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u})=\mathbf{K}\,\mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{K}=\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{u} \tag{3.5}$$

gdje je K matrica krutosti konstrukcije.

3.2. Diskretizacija sustava

Kod ravninskih (2D) problema koriste se uglavnom četveročvorni, osmočvorni (Serendipity) i devetočvorni (Lagrangeov) izoparametrični 2D elementi. Na osnovu iskustva može se reći da se za linearne probleme veća točnost dobije korištenjem manjeg broja elemenata višeg reda umjesto većeg broja jednostavnih linearnih elemenata. Stoga se u linearnim statičkim i dinamičkim analizama preferira uporaba osmočvornih i devetočvornih elemenata u odnosu na četveročvorne elemente.



Bazne funkcije 8-čvornog konačnog elementa

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)$$

za i = 1, 3, 5, 7

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)+\frac{\eta_i^2}{2}(1+\eta_i\eta)(1-\xi^2)$$

za i = 2, 4, 6, 8

Bazne funkcije 9-čvornog konačnog elementa

$$N_i = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+\xi_i)(\eta+\eta_i)$$

za i = 1, 3, 5, 7

$$N_i = \frac{\xi_i^2\xi}{2}(\xi+\xi_i)(1-\eta^2)+\frac{\eta_i^2\eta}{2}(\eta+\eta_i)(1-\xi^2)$$

za i = 2, 4, 6, 8

$$N_i = (1-\eta^2)(1-\xi^2)$$

za i = 9

Slika 3. Bazne funkcije za 8-čvorne i 9-čvorne elemente

U ovom radu su korišteni 8 – čvorni (Serendipity) konačni elementi i za diskretizaciju konstrukcije i za diskretizaciju fluida.

3.2. Elastični model materijala

U svrhu što realnijeg simuliranja stvarnog ponašanja konstrukcije, od iznimnog je značaja primjena odgovarajućeg konstitutivnog modela materijala. On treba biti pouzdan za sve razine opterećenja (djelovanja) i sva moguća stanja naprezanja.

Modeli materijala utemeljeni na velikom broju parametara, koje je vrlo teško ili pak nemoguće eksperimentalno utvrditi, danas su u praksi potpuno odbačeni. Prednost se daje jednostavnijim modelima koji se temelje na manjem broju parametara koji se mogu lako eksperimentalno utvrditi, a koji daju dostatno točne rezultate.

U osnovi, svi se modeli mogu grupirati u one temeljene na mehanici kontinuuma ili u one koji uzimaju u obzir pojavu diskontinuiteta nakon pojave pukotina (modeli temeljeni na mehanici loma i diskretnim elementima).
U nastavku će se ukratko opisati linearni elastični model materijala za 2D problem.
U ovom modelu veza naprezanje (σ) – deformacija (ε) dana je u obliku:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.6}$$

gdje je **D** matrica elastičnih konstanti materijala. Za probleme ravninskog naprezanja, ona je oblika:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

a za probleme ravninske deformacije oblika:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

U gornjim je izrazima E modul elastičnosti materijala, a ν Poisson-ov koeficijent.

4. NUMERIČKA ANALIZA MEĐUDJELOVANJA TEKUĆINE I KONSTRUKCIJE

4.1. Opis problema međudjelovanja tekućina – konstrukcija

Usvojeni model dinamičkog međudjelovanja tekućina-konstrukcija sadrži sljedeće pretpostavke:

- Pomaci tekućine su mali,
- Tekućina je stlačiva,
- Tekućina nije viskozna,

– Nema trenja na dodiru tekućine i konstrukcije,
– Zanemaruju se temperaturni utjecaji.

Ponašanje problema međudjelovanja tekućina-konstrukcija može se također opisati općom diferencijalnom jednadžbom drugog reda u matričnom obliku:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{4.1}$$

koja definira dinamičku ravnotežu promatranog sustava. U izrazu (4.1) **x** predstavlja vektor pomaka, $\dot{\mathbf{x}}$ vektor brzina, a $\ddot{\mathbf{x}}$ vektor ubrzanja sustava; **M** predstavlja matricu masa, **C** matricu prigušenja, a **K** matricu krutosti, dok **f** predstavlja vektor vanjskog čvornog opterećenja. Jednadžba (4.1) općenito uključuje materijalnu i geometrijsku nelinearnost obaju polja. Matrica masa **M** je konstantna, dok je matrica **C** funkcija brzine ($\dot{\mathbf{x}}$), a matrica **K** funkcija pomaka (**x**). Dakle:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}})\\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{4.2}$$

Izraz (4.1) se može napisati i u obliku:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{I}} + \mathbf{F}_{\mathrm{D}} + \mathbf{F}_{\mathrm{R}} = \mathbf{f} \tag{4.3}$$

gdje $\mathbf{F}_{\mathrm{I}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}$ predstavlja sile inercije, $\mathbf{F}_{\mathrm{D}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}$ sile prigušenja, a $\mathbf{F}_{\mathrm{R}} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ unutrašnje sile otpora. Općenito, sve su sile promjenjive u vremenu.

Jednadžba ravnoteže (4.1) može se napisati i u slijedećem raščlanjenom obliku:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12}\\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_1\\ \ddot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12}\\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

U izrazu (4.4), oznake $\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \ddot{\mathbf{x}}_1$ predstavljaju vektore pomaka, brzina i ubrzanja, $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{C}_{11}, \mathbf{K}_{11}$ matrice masa, prigušenja i krutosti, te $\mathbf{f}_1$ vektor vanjskih čvornih sila prvog polja. Oznake $\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{M}_{22}, \mathbf{C}_{22}, \mathbf{K}_{22}, \mathbf{f}_2$ predstavljaju odgovarajuće vrijednosti drugog polja, dok su $\mathbf{M}_{12}, \mathbf{C}_{12}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{M}_{21}, \mathbf{C}_{21}, \mathbf{K}_{21}$ odgovarajuće matrice uslijed međudjelovanja polja. Kako je ranije navedeno, ukoliko nema nekih pojednostavljenja, gornje globalne matrice su nesimetrične, što otežava direktno rješavanje jednadžbe (4.4) i zahtijeva veliki kapacitet računala.

Koristeći formulaciju tlakova za tekućinu i formulaciju pomaka za konstrukciju, ponašanje sustava tekućina-konstrukcija može se analogno jednadžbi (4.4) opisati sustavom dviju diferencijalnih jednadžbi drugog reda:

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_{\mathrm{s}}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{\mathrm{s}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\mathrm{s}} - \mathbf{M}_{\mathrm{s}}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_{\mathrm{cs}} && \text{(a)}\\ &\mathbf{M}_{\mathrm{f}}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_{\mathrm{f}}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_{\mathrm{f}}\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\mathrm{f}} + \mathbf{f}_{\mathrm{cf}} && \text{(b)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

koje definiraju dinamičku ravnotežu sustava. Kod toga je:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{cs} &= \mathbf{Q}\,\mathbf{p} \\
\mathbf{f}_{cf} &= -\rho_f\,\mathbf{Q}^T\left(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

pri čemu $\mathbf{f}_{cs}$ predstavlja vektor sila međudjelovanja tekućine na konstrukciju, a $\mathbf{f}_{cf}$ vektor sila međudjelovanja konstrukcije na tekućinu, dok **Q** predstavlja matricu međudjelovanja.

Ako se (4.5) napiše u obliku (4.4), slijedi:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{f}_f - \rho_f \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{d}} \end{bmatrix}
\tag{4.7}
$$

Iz izraza (4.7) jasno je vidljivo da su globalne matrice masa i krutosti nesimetrične.

U slučaju da koristimo formulaciju potencijala pomaka $[1]$ jednadžba (4.7) prelazi u oblik (4.8):

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{\Psi}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{\Psi}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathbf{f}_s - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{f}_f - \rho_f \mathbf{Q}^T \mathbf{d} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{cs} \\ \mathbf{f}_{cf} \end{bmatrix}
\tag{4.8}
$$

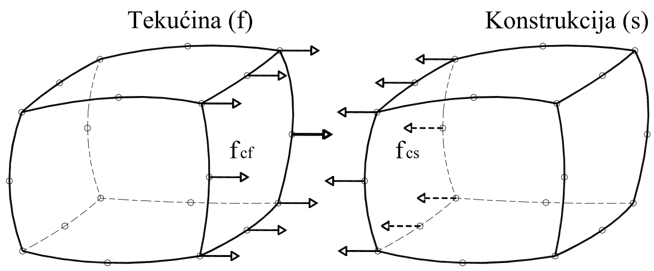
Iz izraza (4.8) jasno je vidljivo da u globalne matrice masa i krutosti nesimetrične.

4.2. Ploha međudjelovanja tekućina - konstrukcija

Ploha međudjelovanja tekućina - konstrukcija, s elementima tekućine i konstrukcije, prikazana je na Slici 4. Matrica veze **Q** uključuje samo integraciju na plohi i prema (2.19) definirana je izrazom:

$$
(\mathbf{Q})_{ij} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_{ui}^T\, \vec{n}\, \mathbf{N}_{\psi j}\, d\Gamma_i \tag{4.9}
$$

Sve veličine u (4.9) definirane su u prethodnim poglavljima. Matrica $\mathbf{N}_{ui}$ je veličine [1×5], a njezi n i elementi odgovaraju odgovarajućim nepoznatim pomacima konstrukcije na granici. Iako se za tekućinu i konstrukciju mogu koristiti elementi s različitim brojem čvorova, prikladno je na granici imati iste elemente (kod toga u čvoru tekućine je jedna, a u čvoru konstrukcije pet nepoznanica).



$\mathbf{f}_{cs}$ - sile konstrukcije na fluid

$\mathbf{f}_{cf}$ - sile fluida na konstrukciju

$\mathbf{f}_{cs} = \mathbf{Q}\mathbf{p}$

$\mathbf{f}_{cf} = -\rho_f \mathbf{Q}^T\left(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{d}}\right)$

Slika 4. Ploha međudjelovanja tekućina - konstrukcija

Jedinična vanjska normala $\vec{n}$ na plohi međudjelovanja definirana je vektorskim produktom (slika 5.):

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^0 & \vec{e}_2^0 & \vec{e}_3^0 \\ \partial X/\partial\xi & \partial Y/\partial\xi & \partial Y/\partial\xi \\ \partial X/\partial\eta & \partial Y/\partial\eta & \partial Z/\partial\eta \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

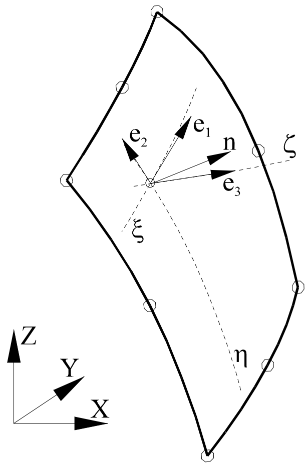
tj. u raspisanom obliku:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial Z}{\partial\eta} - \frac{\partial Y}{\partial\eta}\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right)\vec{e}_1^0 + \left(\frac{\partial X}{\partial\eta}\frac{\partial Z}{\partial\xi} - \frac{\partial X}{\partial\xi}\frac{\partial Z}{\partial\eta}\right)\vec{e}_2^0 + \left(\frac{\partial X}{\partial\xi}\frac{\partial Y}{\partial\eta} - \frac{\partial X}{\partial\eta}\frac{\partial Y}{\partial\xi}\right)\vec{e}_3^0 \\ \vec{n} &= n_x\vec{e}_1^0 + n_y\vec{e}_2^0 + n_z\vec{e}_3^0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdje su $\vec{e}_1^0$, $\vec{e}_2^0$ i $\vec{e}_3^0$ jedinični vektori u smjeru krivocrtnih osiju (slika 5).

Jedinični vektor normale je:

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \tag{4.12}$$



Slika 5. Jedinična normala na plohi međudjelovanja

5. RJEŠENJE SVOJSTVENIH ZADAĆA (WYD METODA)

Rješenje svojstvenih zadaća koristi se i za statičku i dinamičku analizu. Kod statičkih problema rješenje svojstvenih vrijednosti podrazumijeva određivanje kritičnog opterećenja kod kojeg dolazi do nestabilnosti konstrukcije; dok kod dinamičkih problema ono podrazumijeva određivanje dinamičkih karakteristika sustava.

Standardni problem svojstvene zadaće definiran je sljedećim izrazom:

$$Kx = \lambda x \qquad ; \qquad (K - \lambda E)x = 0 \qquad (6.1)$$

gdje je K regularna, a u realnim (fizikalnim) problemima gotovo uvijek i simetrična, pozitivno definitna ili pozitivno semidefinitna matrica.

U problemima dinamike konstrukcija prisutan je tzv. generalizirani (opći) problem:

$$Kx = \lambda Mx \qquad ; \qquad (K - \lambda M)x = 0 \qquad (6.2)$$

M je obično pojasna (ponekad dijagonalna) matrica, ali općenito nije pozitivno definitna nego pozitivno semidefinitna.

Ako se prethodni problem promatra sa stajališta dinamike konstrukcija onda matrica K predstavlja matricu krutosti sustava, a matrica M matricu masa sustava. Obje matrice su dimenzija nxn, gdje n predstavlja broj stupnjeva slobode sustava. Vektor x je dimenzija 1xn, a predstavlja svojstveni vektor, dok je λ svojstvena vrijednost (predstavlja kvadrat kružne frekvencije sustava $\lambda = \omega^2$)

Rješavanjem jednadžbe (6.2) može se dobiti n svojstvenih vrijednosti i pripadajućih n svojstvenih vektora.

Postoji niz matematičkih metoda za rješavanje problema svojstvene zadaće. Većinom metoda traže se sve svojstvene vrijednosti i svi svojstveni vektori, što je često nepotrebno, jer kod većine inženjerskih problema potrebno je odrediti prvih par vrijednosti/vektora, dok

ostali nisu zanimljivi. U ovom radu je korištena WYD metoda kojom se određuje prvih „k“ svojstvenih vrijednosti/vektora, a „k“ je po želji odabran broj. Bitno je napomenuti da WYD metodom nećemo dobiti svojstvene vrijednosti/vektore, nego će ona sustav transformirati u oblik koji će moći primijeniti neke od općepoznatih metoda, npr. Jacobi-jevu metodu, metodu vektorske iteracije i sl.

Osnova numeričkog postupka je traženje rješenja u samo jednom podprostoru, što je višestruko brže od iteracije po podprostorima. Postupak se realizira višestrukim, 2k puta, statičkim rješenjem zadatka te tako formiraju Ritz-ovi bazni vektori. Problem traženja svojstvenih vrijednosti se tako svodi s problema dimenzija nxn na problem dimenzija 2kxak, čime se značajno smanjuje broj računskih operacija i veličina greške nagomilane tim računskim operacijama.

Karakteristika WYD metode je i velika stabilnost i pouzdanost, tj. nema preskakanja svojstvenih vrijednosti i vektora. Općenito za „k“ traženih svojstvenih vrijednosti/vektora potrebno je „2k“ Ritz-ovih vektora. Pri tome je prvih „k“ vektora egzaktno određeno, a ostalih „k“ približno.

Opis postupka

Svojstvena zadaća dinamike konstrukcija opisana je relacijom (6.2). Postupak za formiranje „2k“ Ritz-ovog prostora je sljedeći:

1) Proračun prvog Ritz-ovog vektora x_1 :

$$K \cdot \overline{x}_1 = M \cdot x_0 \qquad (6.3)$$

gdje je x_0 vektor sa jediničnim komponentama. Nakon čega slijedi M – normiranje:

$$x_1 = \frac{\overline{x}_1}{(\overline{x}_1^T M \cdot \overline{x}_1)^{1/2}} \qquad (6.4)$$

2) Proračun ostalih Ritz-ovih vektora x_i (i=1,2,3,….,2k):

$$K \times \overline{x}_i = M \times x_{i\text{-}1} \qquad (6.5)$$

uz određivanje konstanti c_j (j=1,2,…,i-1)

$$c_j = x_j^T \times M \times \overline{x}_i \qquad (6.6)$$

te određivanje novog vektora ortogonalnog na prethodne (Gramm – Schmidt-ov postupak):

$$\overline{\overline{x}}_i = \overline{x}_i - \sum_{j=1}^{i\text{-}1} c_j \times \overline{x}_j \qquad (6.7)$$

i njegovo M – normiranje:

$$x_i = \frac{\overline{\overline{x}}_i}{(\overline{\overline{x}}_i^T \times M \times \overline{\overline{x}}_i)^{1/2}} \qquad (6.8)$$

3) K – ortogonalizacija Ritz-ovih vektora X i formiranje projektivnog podprostora:

$$\widehat{K} = X^T \times K \times X \qquad (6.9)$$

uz uvjet:

$$E = X^T \times M \times X \qquad (6.10)$$

gdje je $\widehat{K}$ općenito puna matrica. Ovim je dobiven standardni svojstveni problem:

$$(\widehat{K} - \lambda \times E) \times q = 0 \qquad (6.11)$$

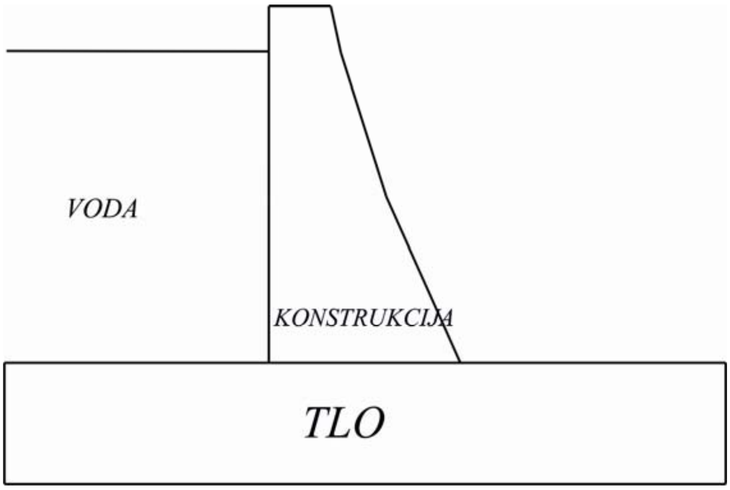
Čije se rješenje može dobiti npr. Jacobi-jevom metodom. Svojstvene vrijednosti ovog „komprimiranog“ problema je upravo „2k“ svojstvenih vektora polaznog problema (pri čemu je prvi „k“ određen točno, a drugi „k“ približno). Svojstveni vektori polaznog problema mogu se dobiti iz sljedeće relacije:

$$X_0 = X \cdot Q \qquad (6.12)$$

Gdje je X matrica Ritz-ovih vektora (nx2k), a Q matrica svojstvenih vektora dobivenih u projektivnom podprostoru.

6. NUMERIČKI PRIMJER

Potrebno je izvršiti analizu pomaka brane, sa slike 6, koja je u međudjelovanju s tekućinom. Za potrebe dinamičke analize kao prvi korak potrebno je odrediti svojstvene vrijednosti/vektore sustava fluid – konstrukcija. Vremenski korak analize i drugi dinamički parametri u direktnoj su funkciji prve i viših svojstvenih vrijednosti. Karakteristike materijala konstrukcije su dane u *Tablici 7.1,* a karakteristike fluida su: brzina zvuka $c_s(m/s^2) = 1439$ i gustoća fluida $\rho_f(t/m^3) = 1,0.$



Slika 6. Sustav konstrukcija – tlo – fluid koji se analizira

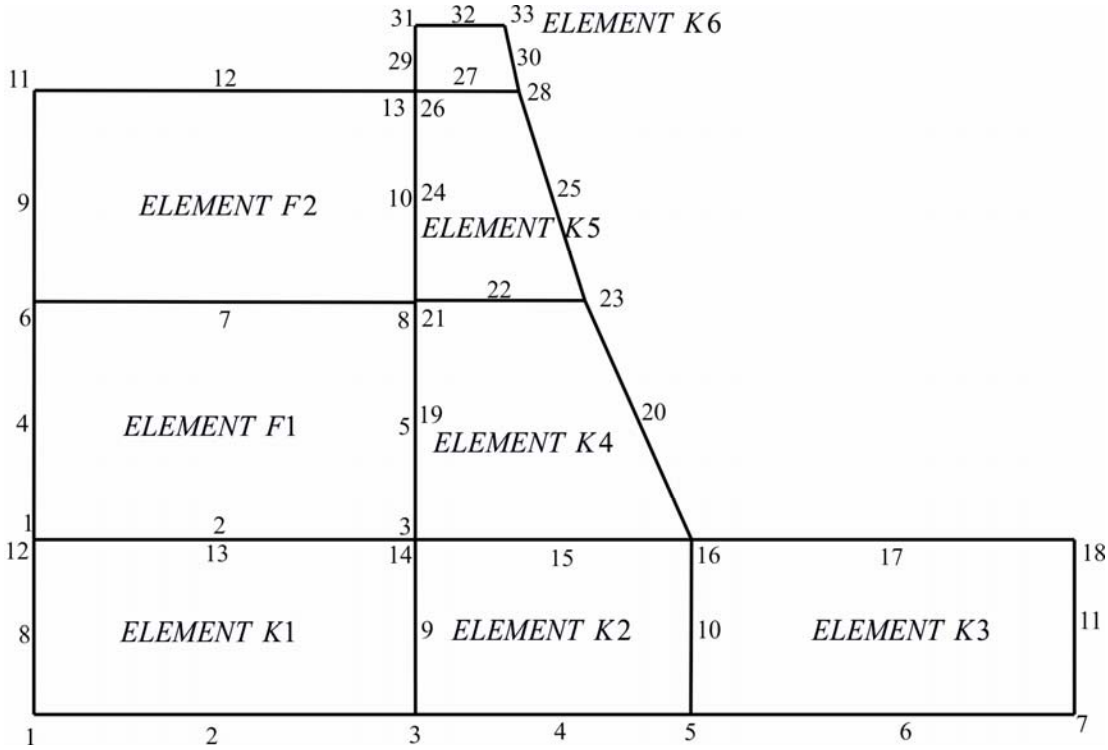
Beton			*Tlo*		
Modul elastičnosti	$E_B(GN/m^2)$	*31,60*	*Modul elastičnosti*	$E_B(GN/m^2)$	*18,0*
Poiss-onov koeficijent	ν_b	*0,20*	*Poiss-onov koeficijent*	ν_b	*0,20*
Gustoća	$\rho_b(t/m^3)$	*2,4*	*Gustoća*	$\rho_b(t/m^3)$	*2,2*
Tlačna čvrstoća	$f_b(MN/m^2)$	*22,46*	*Tlačna čvrstoća*	$f_b(MN/m^2)$	*22,02*

Tablica 1. Karakteristike materijala betona i tla

Za simuliranje ponašanja tla koristi se isti model kao i za simulaciju konstrukcije, s tim da su u model unose karakteristike materijala tla. Prema tome, mreža konačnih elemenata konstrukcije obuhvaća elemente brane i tla. Konstrukciju je podijeljena na šest konačnih elemenata (slika 7). Svaki konačni element ima osam čvorova (Serendipity) i u svakome čvoru pojavljuju se dvije nepoznanice pomaka. Otud slijedi da svaki konačni element ima matricu krutosti dimenzija 16x16 (slika 8). Povezivanjem konačnih elemenata u cjelinu dobije se matrica krutosti konstrukcije dimenzija 66x66. U određenom broju čvorova (njih jedanaest) imamo zadane rubne uvjete (spriječene pomake) pa konačan oblik matrice krutosti dobijemo uključivanjem rubnih uvjeta u sustav.

Polje fluida podijeljeno je na mrežu od dva konačna elementa (slika 7). Kao i kod konstrukcije svaki element ima po osam čvorova. U svakom čvoru nepoznatu predstavlja vrijednost pritiska, tako da dobijemo matricu krutosti elementa fluida dimenzija 8x8. Tri čvora su zajednička za oba konačna elementa, tako da imamo matricu krutosti fluida dimenzija 13x13 (slika 8).

Matrice krutosti i matrice masa konstrukcije i fluida su izračunate u programu DAFIK te su presložene u globalnu matricu krutosti u Excelu (slika 9a). Nakon uključivanja rubnih uvjeta u globalnu matricu krutosti dobijemo konačni oblik matrice krutosti sustava fluid – konstrukcija (slika 9b).



Slika 7. Mreža konačnih elemenata sustava

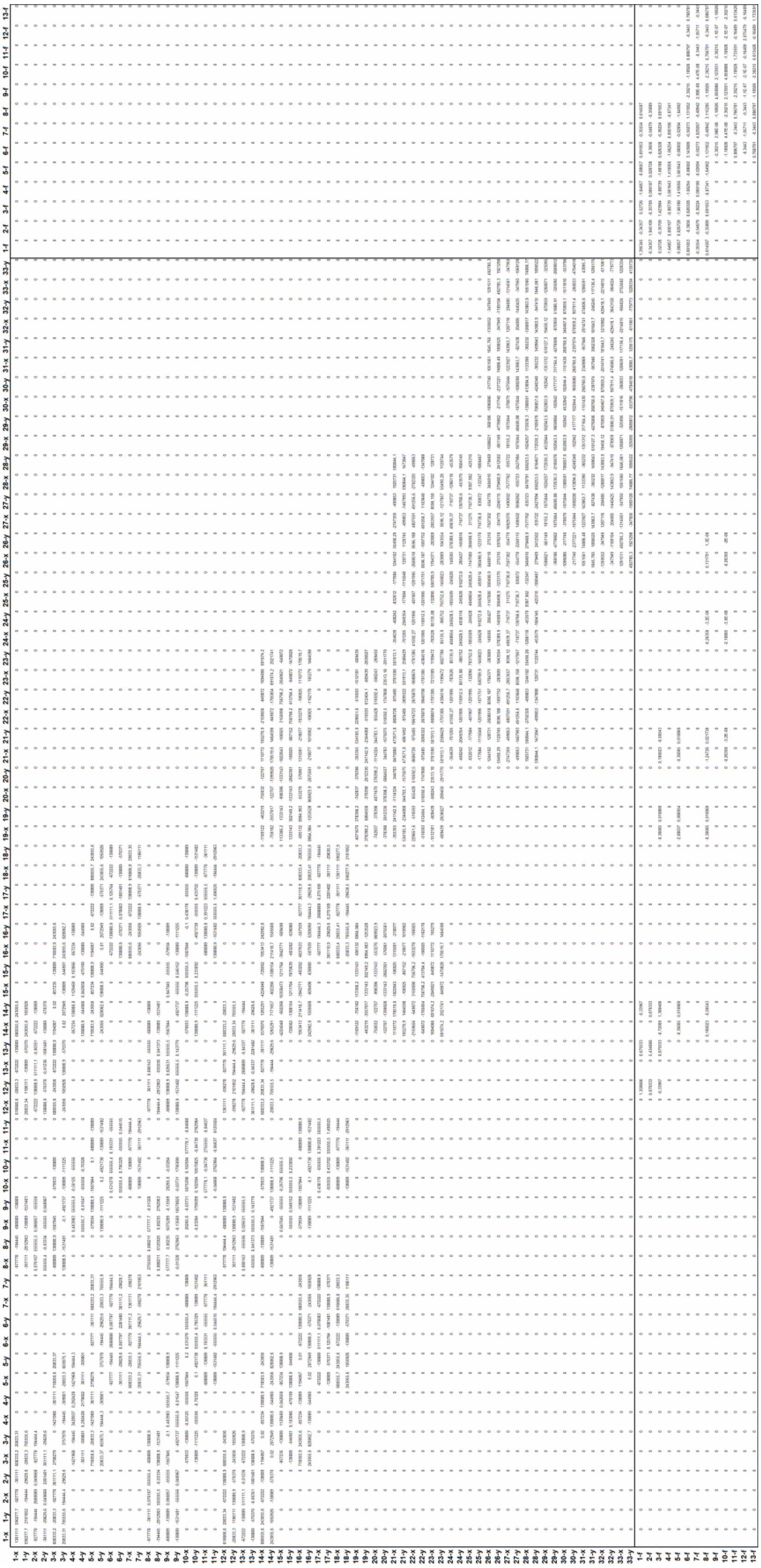
	1-x	1-y	2-x	2-y	3-x	3-y	9-x	9-y	14-x	14-y	13-x	13-y	12-x	12-y	8-x	8-y
1-x	1361111	590277,7	-927778	-361111	608333,2	20833,31	-688889	-138889	680555,6	243055,6	-672222	-138889	616666,6	-20833,3	-977778	-194445
1-y	590277,7	2101852	-194444	-29629,6	-20833,3	705555,6	-138889	-1531481	243055,6	1050926	-138889	-570370	20833,34	1186111	-361111	-2912963
2-x	-927778	-194444	2688889	0,049668	-927778	194444,4	0,066857	-555556	-672222	-138889	511111,1	-0,00351	-672222	138888,9	0,076107	555555,5
2-y	-361111	-29629,6	0,049668	2281481	361111,1	-29629,6	-555555	0,048967	-138889	-570370	-0,01236	-1081481	138888,9	-570370	555555,4	-0,03334
3-x	608333,2	-20833,3	-927778	361111,1	1361111	-590278	-977778	194444,5	616666,6	20833,32	-672222	138888,9	680555,6	-243056	-688889	138888,9
3-y	20833,31	705555,6	194444,4	-29629,6	-590278	2101852	361111,1	-2912962	-20833,3	1186111	138888,9	-570370	-243056	1050926	138888,9	-1531481
9-x	-688889	-138889	0,066857	-555555	-977778	361111,1	2755555	-0,0961	-977778	-361111	0,026531	555555,5	-688889	138888,9	577777,7	0,00235
9-y	-138889	-1531481	-555556	0,048967	194444,5	-2912962	-0,0961	6125925	-194444	-2912962	555555,5	0,143779	138888,9	-1531482	-0,01328	2762963
14-x	680555,6	243055,6	-672222	-138889	616666,6	-20833,3	-977778	-194444	1361111	590277,7	-927778	-361111	608333,2	20833,34	-688889	-138889
14-y	243055,6	1050926	-138889	-570370	20833,32	1186111	-361111	-2912962	590277,7	2101852	-194444	-29629,6	-20833,3	705555,5	-138889	-1531481
13-x	-672222	-138889	511111,1	-0,01236	-672222	138888,9	0,026531	555555,5	-927778	-194444	2688889	-0,04337	-927778	194444,4	0,080143	-555556
13-y	-138889	-570370	-0,00351	-1081481	138888,9	-570370	555555,5	0,143779	-361111	-29629,6	-0,04337	2281482	361111,1	-29629,6	-555555	0,041373
12-x	616666,6	20833,34	-672222	138888,9	680555,6	-243056	-688889	138888,9	608333,2	-20833,3	-927778	361111,1	1361111	-590278	-977778	194444,4
12-y	-20833,3	1186111	138888,9	-570370	-243056	1050926	138888,9	-1531482	20833,34	705555,5	194444,4	-29629,6	-590278	2101852	361111	-2912963
8-x	-977778	-361111	0,076107	555555,4	-688889	138888,9	577777,7	-0,01328	-688889	-138889	0,080143	-555555	-977778	361111	2755555	0,088211
8-y	-194445	-2912963	555555,5	-0,03334	138888,9	-1531481	0,00235	2762963	-138889	-1531481	-555556	0,041373	194444,4	-2912963	0,088211	6125925

a)matrica krutosti elementa konstrukcije

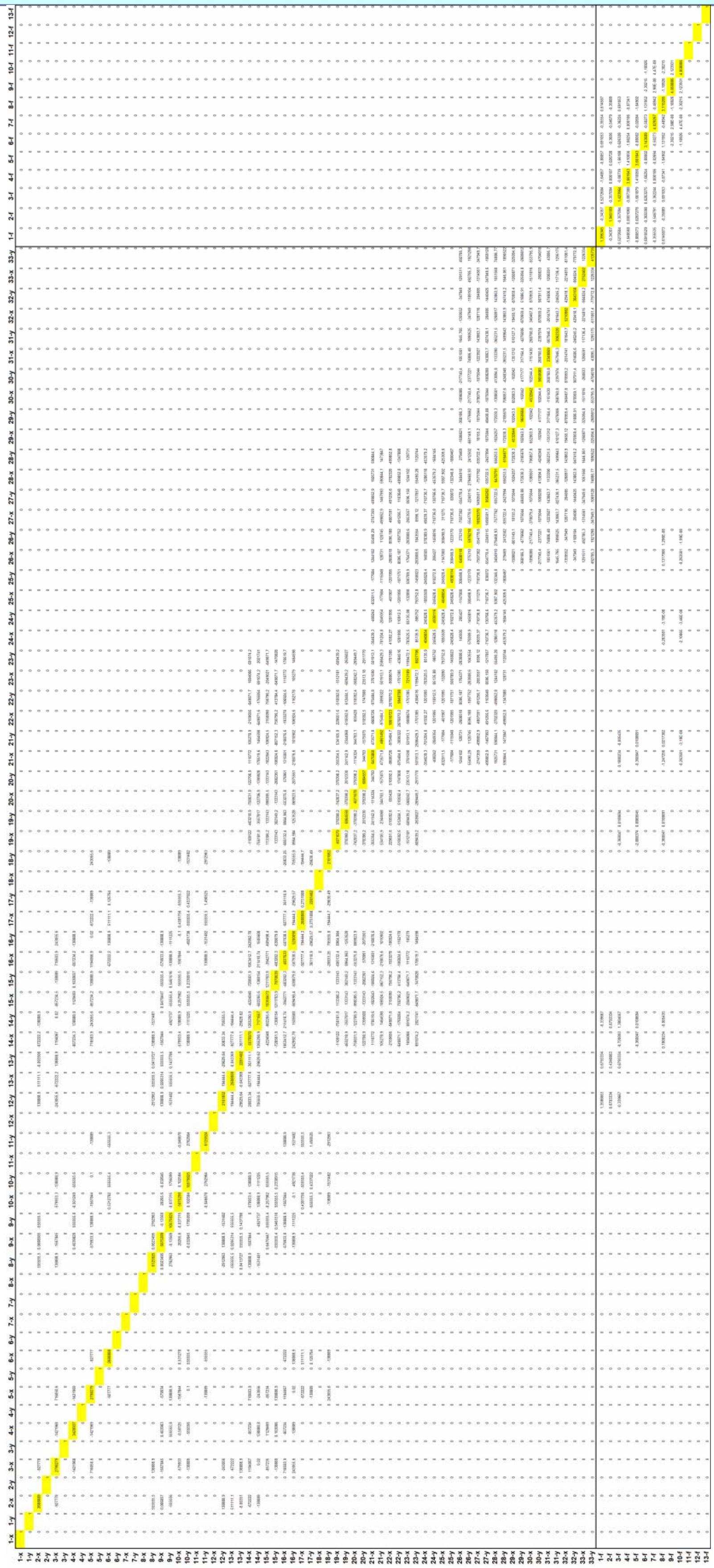
	1	**2**	**3**	**5**	**8**	**7**	**6**	**4**
1	1,395345	-0,34357	0,52726	-0,88057	0,614587	-0,35554	0,691053	-1,64857
2	-0,34357	1,945109	-0,35709	0,026728	-0,35889	-0,54679	-0,3656	0,000107
3	0,52726	-0,35709	1,423964	-1,66188	0,691053	-0,36224	0,626328	-0,88739
5	-0,88057	0,026728	-1,66188	3,661643	-1,64902	-0,02694	-0,88002	1,410056
8	0,614587	-0,35889	0,691053	-1,64902	1,381693	-0,32454	0,518525	-0,87341
7	-0,35554	-0,54679	-0,36224	-0,02694	-0,32454	1,953788	-0,33785	0,000106
6	0,691053	-0,3656	0,626328	-0,88002	0,518525	-0,33785	1,410098	-1,66254
4	-1,64857	0,000107	-0,88739	1,410056	-0,87341	0,000106	-1,66254	3,661643

b)matrica krutosti elementa fluida

Slika 8. Matrice krutosti konačnog elementa konstrukcije i konačnog elementa fluida (boldirani brojevi u 1. retku i 1. stupcu predstavljaju čvorove konačnih element)



Slika 9a. Globalna matrica krutosti bez rubnih uvjeta



Slika 9b. Globalna matrica krutosti s rubnim uvjetima

Pošto je izvršena diskretizacija sustava, izračunata matrica krutosti i matrica masa pristupa se računanju svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Računaju se dvije svojstvene vrijednosti i nakon njihovog izračuna odrede se vrijednosti perioda osciliranja koje iznose: $T_1 = 0,452\ s\ i\ T_2 = 0,396\ s.$

Na sljedećim stranicama prikazan je postupak ovisan o izrazima $(6.1-6.12)$. Na stranici 26. vidljiv je odabir nultog vektora $\mathrm{x}_0 = [1.........1]$, te izračun prvog Ritz – ovog vektora uz korištenje jednadžbi (6.3) i (6.4).

Na stranici 27. prikazan je izračun drugoga Ritz-ovog vektora uz korištenje izraza (6.4 – 6.8). Isti postupak se ponavlja za izračunavanje trećeg i četvrtog Ritz-ovog vektora.

Dobiveni vektori formiraju Ritz-ovu matricu što je, uz izračun svojstvenih vrijednosti/vektora, prikazano na stranici 28.

Kod za izračunavanje Jacobi–jeve matrice, matrice $\widehat{K}$ (iz koje se očitavaju svojstvene vrijednosti) i matrice svojstvenih vektora za projektivni podprostor dan je na stranicama 29., 30. i 31.

Dobivene vrijednosti svojstvenih vektora u čvorovima (vektori pomaka) i grafički su dane na Slikama 10. i 11.

	x0	M x0	x1-p	Nazivnik	x1
1	1	0	0	0,167946229	0
2	1	0	0		0
3	1	244	0,000895323		0,005331009
4	1	0	0		0
5	1	51,911	0,001183177		0,007044974
6	1	0	0		0
7	1	171,288	0,001100402		0,006552109
8	1	0	0		0
9	1	51,911	0,00109606		0,006526257
10	1	0	0		0
11	1	244	0,000778637		0,00463623
12	1	0	0		0
13	1	0	0		0
14	1	0	0		0
15	1	0	0		0
16	1	244	9,3044E-05		0,00055401
17	1	415,288	0,001254615		0,007470339
18	1	415,288	0,000593994		0,003536811
19	1	415,288	0,001165968		0,006942505
20	1	415,288	4,40728E-05		0,000262422
21	1	0	0		0
22	1	244	0,000233785		0,001392026
23	1	0	0		0
24	1	13,83334	0,000103475		0,00061612
25	1	244	0,000702305		0,004181727
26	1	177,3333	-4,74338E-05		-0,000282434
27	1	80,61897	0,001493312		0,008891608
28	1	54,8523	0,001129562		0,006725735
29	1	361,9911	0,001595283		0,009498771
30	1	361,9911	0,000397077		0,00236431
31	1	71,78564	0,001563934		0,009312109
32	1	71,78564	3,13951E-05		0,000186935
33	1	244	0,000747415		0,004450325
34	1	244	0,000216301		0,001287917
35	1	0	0		0
36	1	30,5	0,000449535		0,002676662
37	1	194,3305	0,002615975		0,015576265
38	1	157,9305	0,001748043		0,010408347
39	1	158,9972	0,002451562		0,014597306
40	1	158,9972	-4,351E-05		-0,000259071
41	1	42,19222	0,004213012		0,025085479
42	1	26,62556	0,002363102		0,014070587
43	1	190,3493	0,004138465		0,024641606
44	1	190,3493	0,001256135		0,007479389
45	1	26,89222	0,004157301		0,024753764
46	1	26,89222	0,000351431		0,002092519
47	1	82,00722	0,005850515		0,034835644
48	1	56,14056	0,002671019		0,015904014
49	1	56,14054	0,005792396		0,034489585
50	1	56,14054	0,000513293		0,003056291
51	1	14,86678	0,007771639		0,046274567
52	1	8,400106	0,002792476		0,016627203
53	1	60,85908	0,007773573		0,046286083
54	1	60,85908	0,001903993		0,011336922
55	1	8,400108	0,007767175		0,04624799
56	1	8,400108	0,000960956		0,005721805
57	1	11,06032	0,008335353		0,049631083
58	1	11,06032	0,002819993		0,016791044
59	1	11,06031	0,008350046		0,049718569
60	1	11,06031	0,00115483		0,006876188
61	1	1,382539	0,008934175		0,053196637
62	1	1,382539	0,002848699		0,016961971
63	1	10,48453	0,008912872		0,053069793
64	1	10,48453	0,002059471		0,01226268
65	1	1,382539	0,008898504		0,052984244
66	1	1,382539	0,001343912		0,008002035
1	1	0,000102	0,009605925		0,057196432
2	1	0,000541	0,012301663		0,073247628
3	1	0,000102	0,01824742		0,108650371
4	1	0,000543	0,009197725		0,054765891
5	1	0,000543	0,021074329		0,125482595
6	1	0,000177	0,007382647		0,043958396
7	1	0,000946	0,008034067		0,047837138
8	1	0,000177	0,021239936		0,12646867
9	1	0,000401	0,002670366		0,015900125
10	1	0,000401	0,013974826		0,083210122
11	1	0	0		0
12	1	0	0		0
13	1	0	0		0

	x1	M x1	x2-p	c1	x2-2p	Nazivnik	x2
1	0	0	0	0,00468091	0	0,001054435	0
2	0	0	0		0		0
3	0,005331	1,300766	1,34964E-05		-1,14576E-05		-0,010866071
4	0	0	0		0		0
5	0,007045	0,365712	1,34491E-05		-1,95278E-05		-0,018519674
6	0	0	0		0		0
7	0,006552	1,122298	1,10868E-05		-1,9583E-05		-0,018572051
8	0	0	0		0		0
9	0,006526	0,338785	1,4122E-05		-1,64268E-05		-0,015578819
10	0	0	0		0		0
11	0,004636	1,13124	1,22529E-05		-9,44888E-06		-0,008961083
12	0	0	0		0		0
13	0	0	0		0		0
14	0	0	0		0		0
15	0	0	0		0		0
16	0,000554	0,135179	-6,05358E-07		-3,19863E-06		-0,003033501
17	0,00747	3,102342	1,68022E-05		-1,81658E-05		-0,017227997
18	0,003537	1,468795	1,17052E-05		-4,85025E-06		-0,004599858
19	0,006943	2,883139	1,71713E-05		-1,53259E-05		-0,014534714
20	0,000262	0,108981	-6,83377E-06		-8,06214E-06		-0,007645936
21	0	0	0		0		0
22	0,001392	0,339654	5,89887E-07		-5,92606E-06		-0,005620127
23	0	0	0		0		0
24	0,000616	-0,86998	-2,02139E-06		-4,90539E-06		-0,004652156
25	0,004182	1,020341	9,0868E-06		-1,04875E-05		-0,009946062
26	-0,00028	-5,0811	-2,89932E-06		-1,57727E-06		-0,001495846
27	0,008892	1,626029	2,50539E-05		-1,65669E-05		-0,015711652
28	0,006726	-1,29334	2,29998E-05		-8,48271E-06		-0,008044791
29	0,009499	3,438471	2,74309E-05		-1,70319E-05		-0,016152658
30	0,002364	0,855859	-2,36784E-06		-1,3435E-05		-0,012741383
31	0,009312	0,668476	2,63205E-05		-1,72687E-05		-0,016377169
32	0,000187	0,013419	-1,35006E-05		-1,43756E-05		-0,013633483
33	0,00445	1,085879	1,02699E-05		-1,05616E-05		-0,010016409
34	0,001288	0,314252	8,6269E-07		-5,16593E-06		-0,00489924
35	0	0	0		0		0
36	0,002677	0,081638	1,94338E-06		-1,05858E-05		-0,01003934
37	0,015576	6,854312	6,17894E-05		-1,11217E-05		-0,010547506
38	0,010408	1,522741	4,13455E-05		-7,37503E-06		-0,0069943
39	0,014597	2,320931	5,63806E-05		-1,19481E-05		-0,011331252
40	-0,00026	-0,04119	-1,90925E-05		-1,78798E-05		-0,016956795
41	0,025085	2,68924	0,000117739		3,16196E-07		0,000299872
42	0,014071	0,34382	6,1708E-05		-4,15515E-06		-0,003940643
43	0,024642	4,690512	0,000115008		-3,37224E-07		-0,000319815
44	0,007479	1,423696	2,17898E-05		-1,32205E-05		-0,012538029
45	0,024754	0,665684	0,000115467		-4,03018E-07		-0,000382212
46	0,002093	0,056272	-1,00543E-05		-1,98492E-05		-0,018824464
47	0,034836	4,004719	0,000178607		1,55441E-05		0,01474163
48	0,015904	0,89286	7,33311E-05		-1,11415E-06		-0,001056631
49	0,03449	1,936264	0,000176512		1,50696E-05		0,014291671
50	0,003056	0,171582	-7,0076E-06		-2,13138E-05		-0,020213498
51	0,046275	0,440382	0,000251773		3,51662E-05		0,033350778
52	0,016627	0,13967	7,77209E-05		-1,09462E-07		-0,000103811
53	0,046286	2,816928	0,000251776		3,51153E-05		0,033302518
54	0,011337	0,689955	4,39461E-05		-9,12095E-06		-0,008650087
55	0,046248	0,388488	0,000251705		3,52225E-05		0,033404123
56	0,005722	0,048064	8,08259E-06		-1,87007E-05		-0,017735241
57	0,049631	0,548936	0,000273332		4,10135E-05		0,038896184
58	0,016791	0,185714	7,87538E-05		1,56439E-07		0,000148363
59	0,049719	0,549903	0,000273903		4,11747E-05		0,039049105
60	0,006876	0,076053	1,52512E-05		-1,69356E-05		-0,016061353
61	0,053197	0,073546	0,000296107		4,70979E-05		0,044666539
62	0,016962	0,023451	7,97737E-05		3,76246E-07		0,000356822
63	0,05307	0,556412	0,00029541		4,69952E-05		0,044569142
64	0,012263	0,128568	4,97907E-05		-7,6098E-06		-0,007216943
65	0,052984	0,073253	0,000294907		4,6893E-05		0,044472167
66	0,008002	0,011063	2,23807E-05		-1,50761E-05		-0,014297766
	0,057196	5,81E-06	0,000358692		9,09607E-05		0,086264859
	0,073248	3,96E-05	0,00043739		9,45241E-05		0,089644355
	0,10865	1,1E-05	0,000602859		9,42765E-05		0,089409556
	0,054766	2,97E-05	0,000334275		7,79207E-05		0,073898095
	0,125483	6,82E-05	0,000678103		9,07306E-05		0,086046664
	0,043958	7,79E-06	0,000259362		5,3597E-05		0,050830043
	0,047837	4,53E-05	0,000275791		5,18703E-05		0,049192485
	0,126469	2,24E-05	0,000678933		8,6945E-05		0,082456528
	0,0159	6,37E-06	9,4405E-05		1,99779E-05		0,018946596
	0,08321	3,33E-05	0,000448314		5,88155E-05		0,055779149
	0	0	0		0		0
	0	0	0		0		0
	0	0	0		0		0

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0,00533101	-0,010866071	-0,00728975	0,013476781
4	0	0	0	0
5	0,00704497	-0,018519674	-0,012209719	0,022011281
6	0	0	0	0
7	0,00655211	-0,018572051	-0,013238063	0,020519035
8	0	0	0	0
9	0,00652626	-0,015578819	-0,010860022	0,014194894
10	0	0	0	0
11	0,00463623	-0,008961083	-0,004378859	0,004029857
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0,00055401	-0,003033501	0,007384213	-0,008988167
17	0,00747034	-0,017227997	-0,014043073	0,022313076
18	0,00353681	-0,004599858	0,004816204	0,001345908
19	0,00694251	-0,014534714	-0,012493775	0,014468922
20	0,00026242	-0,007645936	0,005334625	0,001371737
21	0	0	0	0
22	0,00139203	-0,005620127	0,006168702	-0,005509281
23	0	0	0	0
24	0,00061612	-0,004652156	0,010614894	-0,012847914
25	0,00418173	-0,009946062	-0,005858982	0,007179438
26	-0,0002824	-0,001495846	0,004400031	-0,006264786
27	0,00889161	-0,015711652	-0,018167307	0,019932703
28	0,00672573	-0,008044791	0,008706047	0,004370378
29	0,00949877	-0,016152658	-0,0178974	0,019818703
30	0,00236431	-0,012741383	0,005959606	0,010966522
31	0,00931211	-0,016377169	-0,015514052	0,018886907
32	0,00018694	-0,013633483	0,007613222	0,004424577
33	0,00445033	-0,010016409	-0,005683217	0,008310113
34	0,00128792	-0,00489924	0,004190677	-0,004659426
35	0	0	0	0
36	0,00267666	-0,01003934	0,009743917	-0,007650619
37	0,01557626	-0,010547506	-0,018791463	0,016428093
38	0,01040835	-0,0069943	0,011349018	0,006987969
39	0,01459731	-0,011331252	-0,018498757	0,018224302
40	-0,0002591	-0,016956795	0,00495832	0,013565566
41	0,02508548	0,000299872	-0,011528412	0,007619206
42	0,01407059	-0,003940643	0,019296009	0,006327615
43	0,02464161	-0,000319815	-0,011724782	0,00764531
44	0,00747939	-0,012538029	0,007890392	0,015312262
45	0,02475376	-0,000382212	-0,011553521	0,007384832
46	0,00209252	-0,018824464	0,000786115	0,022147712
47	0,03483564	0,01474163	0,010066297	-0,011167963
48	0,01590401	-0,001056631	0,027121328	0,0021511
49	0,03448959	0,014291671	0,009293181	-0,011015716
50	0,00305629	-0,020213498	-0,003425956	0,026640205
51	0,04627457	0,033350778	0,042945279	-0,037547894
52	0,0166272	-0,000103811	0,031574108	0,000514222
53	0,04628608	0,033302518	0,0425103	-0,037217325
54	0,01133692	-0,008650087	0,015791102	0,01280581
55	0,04624799	0,033404123	0,042707624	-0,037433624
56	0,00572181	-0,017735241	-0,00031171	0,024991048
57	0,04963108	0,038896184	0,053008324	-0,045315381
58	0,01679104	0,000148363	0,032119453	0,000500214
59	0,04971857	0,039049105	0,05301336	-0,045238828
60	0,00687619	-0,016061353	0,002461153	0,023171579
61	0,05319664	0,044666539	0,063361082	-0,052864242
62	0,01696197	0,000356822	0,032377442	0,000676035
63	0,05306979	0,044569142	0,063305134	-0,053101597
64	0,01226268	-0,007216943	0,018750734	0,010530389
65	0,05298424	0,044472167	0,063103908	-0,053203693
66	0,00800203	-0,014297766	0,005558511	0,021012597
	0,05719643	0,086264859	0,144770857	-0,212653947
	0,07324763	0,089644355	0,075377577	-0,212040569
	0,10865037	0,089409556	-0,04548968	-0,209183053
	0,05476589	0,073898095	0,141983751	-0,197938284
	0,1254826	0,086046664	-0,045404748	-0,170624461
	0,0439584	0,050830043	0,108743389	-0,149509962
	0,04783714	0,049192485	0,052104703	-0,131498342
	0,12646867	0,082456528	-0,013794986	-0,133759397
	0,01590013	0,018946596	0,054927941	-0,074575121
	0,08321012	0,055779149	0,001312638	-0,079168013
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

K-kapa

291,133767	-344,04249	-66,266641	297,419891
-344,05551	1406,15784	179,279977	-1012,6096
-66,278994	179,263194	1350,09699	-1080,1658
297,452971	-1012,598	-1080,1916	1930,91657

fi

-1,171E-22

P-jacobi

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1,171E-22
0	0	-1,171E-22	1

K-kapa (nakon Jacobija)

193,279941	1,8519E-13	-1,432E-18	-2,04E-29
0,00758506	251,31027	-1,43E-26	-1,533E-37
-0,0036811	0,00426524	1240,58223	-3,211E-35
0,03900104	-0,0197073	-0,0223827	3293,13273

P-umnožak

0,9583631	-0,1627516	0,1903105	0,1372368
0,2834689	0,4474849	-0,7079679	-0,4671018
0,0287117	0,5729579	0,677424	-0,4604256
0,0190031	0,6670746	-0,0604986	0,7422872

T - periodi

0,45194593			
	0,39634625		
		0,1783886	
			0,1094902

0,39865
0,20267
0,15634

248,42476	2,425E-24	1,936E-25	-2,731E-29
4,28E-13	963,13392	1,368E-30	4,937E-36
-6,975E-12	2,355E-12	1706,5887	-4,054E-40
3,305E-12	5,105E-12	5,034E-12	6627,0828

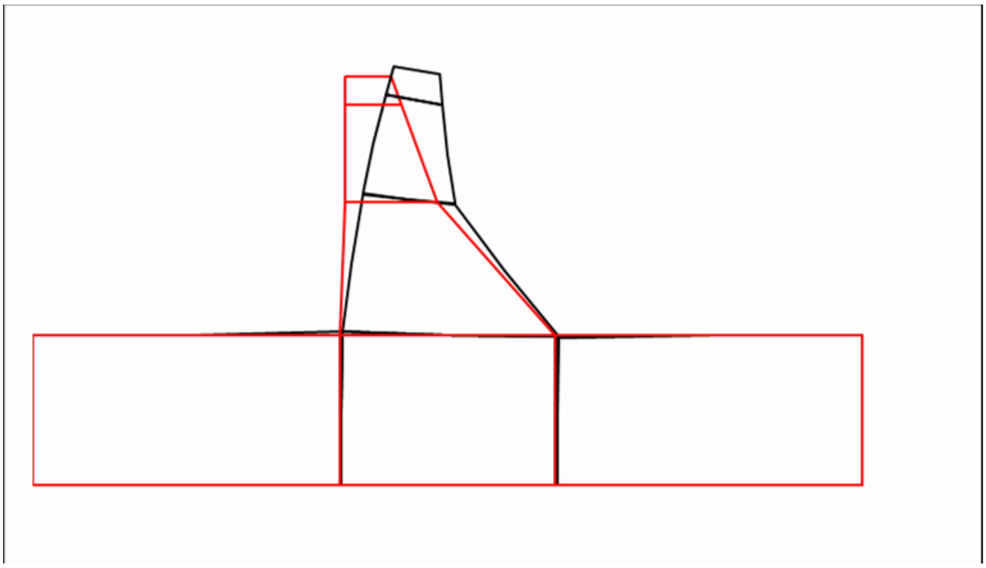
Izvorni Vlastiti vektori

1	0	0	0	0
	0	0	0	0
2	0,002076	-0,00092	0,002954	0,019167
	0	0	0	0
3	0,00157	-0,00175	0,004849	0,031578
	0	0	0	0
4	0,001025	-0,00327	0,004186	0,0309
	0	0	0	0
5	0,001796	-0,00479	0,004056	0,023709
	0	0	0	0
6	0,001854	-0,00459	0,004016	0,009829
	0	0	0	0
7	0	0	0	0
	0	0	0	0
8	0	0	0	0
	-0,00029	-0,00321	0,007799	-0,00858
9	0,002297	-0,00209	0,002756	0,032101
	0,002249	0,001023	0,007111	0,001416
10	0,00245	-0,00514	0,002272	0,024235
	-0,00174	0,000507	0,008994	0,002169
11	0	0	0	0
	-0,00019	-0,00288	0,008756	-0,00411
12	0	0	0	0
	-0,00067	-0,00467	0,011379	-0,01217
13	0,001156	-0,0037	0,003434	0,013247
	-0,00069	-0,00228	0,004365	-0,00602
14	0,003925	-0,00559	-0,0007	0,03172
	0,004498	0,003209	0,012609	0,003916
15	0,004387	-0,00581	-8E-05	0,0318
	-0,00097	0,004644	0,012844	0,011672
16	0,004195	-0,00513	0,001714	0,03009
	-0,00338	0,001182	0,014577	0,006173
17	0,00142	-0,00292	0,003586	0,014075
	-0,00012	-0,00311	0,006834	-0,00292
18	0	0	0	0
	-0,00015	-0,00445	0,014681	-0,00511
19	0,01171	-0,00706	-0,00329	0,027911
	0,008451	0,00634	0,014198	0,004657
20	0,010593	-0,00589	-0,00283	0,029341
	-0,00465	0,004344	0,014494	0,015672
21	0,02394	-0,00547	-0,00371	0,014266
	0,013042	0,011223	0,018156	-0,00042
22	0,023334	-0,00577	-0,00349	0,014605
	0,004131	0,007907	0,014719	0,014616
23	0,023423	-0,00589	-0,00329	0,014377
	-0,00289	0,00646	0,012918	0,025158
24	0,037641	-0,00076	0,003688	-0,01503
	0,015762	0,013913	0,022017	-0,00821
25	0,037162	-0,00124	0,003408	-0,0144
	-0,00239	0,006265	0,01096	0,031213
26	0,054321	0,006951	0,016559	-0,05687
	0,016822	0,015681	0,024596	-0,01183
27	0,054312	0,006899	0,016281	-0,0564
	0,00911	0,011874	0,018204	0,007831
28	0,054306	0,00692	0,016348	-0,05671
	0,000922	0,007625	0,011922	0,027763
29	0,059251	0,009471	0,020559	-0,0694
	0,017066	0,01607	0,024819	-0,01218
30	0,05938	0,009579	0,020466	-0,06941
	0,002548	0,008561	0,012945	0,024513
31	0,064458	0,012369	0,024622	-0,08198
	0,017299	0,016401	0,024868	-0,01224
32	0,064303	0,012155	0,024643	-0,0821
	0,010445	0,012543	0,019508	0,004237
33	0,064185	0,011942	0,024565	-0,08205
	0,004175	0,009501	0,014139	0,020815

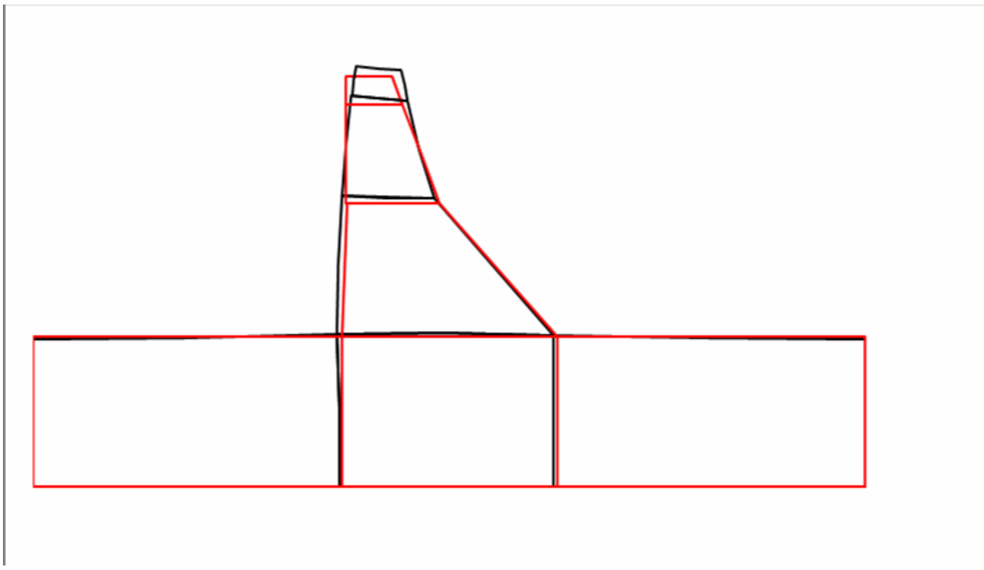
```
Sub Jacobi_st()
Dim P(4, 4) As Double
Dim Pp(4, 4) As Double
Dim Pu(4, 4) As Double
Dim Pr(4, 4) As Double
Dim Kkapa(4, 4) As Double

rang = 4
st_row = 1
st_col = 6

For i = 1 To rang
    For j = 1 To rang
       Kkapa(i, j) = Cells(i + st_row, j + st_col)
       Pr(i, j) = 0
       Pu(i, j) = 0
          If (i = j) Then Pu(i, j) = 1
      Next j
  Next i


ponovo:
' glavna petlja po svim recima i stupcima
For i = 1 To rang
    For j = i + 1 To rang

' formiranje matrice P
       For K = 1 To rang
       For l = 1 To rang
          P(K, l) = 0
          If (K = l) Then P(K, l) = 1
        Next l
        Next K
        If (Kkapa(i, i) = Kkapa(j, j)) Then
           fi = 0.785398163
             Else
           fi = 0.5 * Atn(2 * Kkapa(i, j) / (Kkapa(i, i) - Kkapa(j, j)))
             End If
        P(i, i) = Cos(fi)
        P(i, j) = -Sin(fi)
        P(j, i) = Sin(fi)
        P(j, j) = Cos(fi)
        Cells(2, 6 + rang + 2) = fi
```

```
        For l = 1 To rang
          Cells(1 + K, 6 + rang + 3 + l) = P(K, l)
         Next l
       Next K


' mnozenje  Kkapa sa P
  For K = 1 To rang
      For l = 1 To rang
         Pp(K, l) = 0
         For M = 1 To rang
            Pp(K, l) = Pp(K, l) + Kkapa(K, M) * P(M, l)
          Next M
         Next l
       Next K

' mnozenje  P(T) sa Pp
  For K = 1 To rang
      For l = 1 To rang
         Kkapa(K, l) = 0
         For M = 1 To rang
            Kkapa(K, l) = Kkapa(K, l) + P(M, K) * Pp(M, l)
          Next M
         Next l
       Next K

' Vlastiti vektori u Pu
  For K = 1 To rang
      For l = 1 To rang
         Pr(K, l) = 0
         For M = 1 To rang
            Pr(K, l) = Pr(K, l) + Pu(K, M) * P(M, l)
          Next M
         Next l
       Next K
  For K = 1 To rang
      For l = 1 To rang
            Pu(K, l) = Pr(K, l)
         Next l
       Next K

' ispis u Excel
For K = 1 To rang
   For l = 1 To rang
```

```
    For l = 1 To rang
      Cells(K + st_row + rang + 1, l + st_col) = Kkapa(K, l)
      Cells(1 + K + rang + 1, 6 + rang + 3 + 1) = Pu(K, 1)
   Next l
  Next K

' kraj glavne petlje po svim recima i stupcima
    Next j
  Next i

 ' kontrola van dijagonalnog elementa
 suma = 0
 For i = 1 To rang
    For j = i + 1 To rang
      suma = suma + Abs(Kkapa(i, j))
   Next j
  Next i

  If (suma > 0.00000001) Then GoTo ponovo


 ' ispis u Excel
 For i = 1 To rang
    For j = 1 To rang
      Cells(i + st_row + rang + 1, j + st_col) = Kkapa(i, j)
   Next j
  Next i

End Sub
```



Slika 10. Pomaci konstrukcije za period osciliranja $T_1 = 0,452s$



Slika 11. Pomaci konstrukcije za period osciliranja $T_2 = 0,396s$

LITERATURA

1. Harapin, *Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije*, Doktorska disertacija, Split, 2000.
2. A. Mihanović, *Dinamika konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.
3. D. Brzović, *Doprinos numeričkom modeliranju dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije*, Magistarski rad, Split, 2008.
4. M. Sekulović, *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
5. V. Jović, *Uvod u inženjersko numeričko modeliranje*, Aquarius Engineering, Split, 1993.
6. Ž. Nikolić, *Metoda konačnih elemenata*, Predavanja na poslijediplomskom studiju Građevinsko – arhitektonskog fakulteta u Splitu, 2007.